Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

# LA TEORÍA MODERNA DE MEDIDAS DE RIESGO, EN EL CONTEXTO DE LA COMPLEJIDAD

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

**ILMO. SR. D. JOSÉ MIGUEL ANGULO IBÁÑEZ**

GRANADA, 2016

Academia de Ciencias Matemáticas,
Físico-Químicas y Naturales de Granada

# LA TEORÍA MODERNA DE MEDIDAS DE RIESGO, EN EL CONTEXTO DE LA COMPLEJIDAD

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN
COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

**ILMO. SR. D. JOSÉ MIGUEL ANGULO IBÁÑEZ**

GRANADA, 2016

# LA TEORÍA MODERNA DE MEDIDAS DE RIESGO, EN EL CONTEXTO DE LA COMPLEJIDAD

**JOSÉ MIGUEL ANGULO IBÁÑEZ**

**Excmo. Sr. Presidente**

**Excmos. e Ilmos. Sras. y Sres. Académicos**

**Señoras y Señores**

Ante todo, quiero expresar mi profundo y sincero agradecimiento a la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada, y a su Sección de Matemáticas, por haber aceptado mi candidatura para ingresar como miembro de número. Es para mí un gran honor, y quiero agradecer especialmente a los Académicos Dres. Ramón Gutiérrez Jáimez, Andrés González Carmona y Josefa Linares Pérez el haberme propuesto dar este paso y ofrecido su apoyo. Quiero también expresarle, Sr. Presidente, así como al anterior presidente de la Academia, mi agradecimiento por su apoyo en este proceso, desde mi nombramiento hasta este acto.

Hace unos veintisiete años, cuando preparé mi proyecto docente para optar a la plaza de Profesor Titular de Universidad, consideré que una fundamentación apropiada requería indagar en las raíces filosóficas e históricas de la Probabilidad, como base de la materia científica objeto del proyecto. Entonces me adentré en el estudio de aspectos relativos a la evolución del conocimiento, especialmente en lo concerniente al desarrollo de las disciplinas científicas (gestación, constitución aceptada por la comunidad científica), como parte del proceso permanente de ramificación-integración de la Ciencia, y a la importancia que en este proceso han tenido las instituciones académicas y las sociedades y foros científicos. Veintiún años más tarde (periodo 2010-2013), tuve la responsabilidad de presidir la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO). La inmersión directa en la actividad interna y externa de nuestra sociedad durante ese periodo, incluyendo la celebración del 50.º aniversario de su fundación, en el que participaron sociedades e instituciones nacionales e internacionales, la acción directa en la gestación y constitución de la Federación de Sociedades Nacionales Estadísticas Europeas (FENStatS), la celebración en 2013 del Año Internacional de la Estadística (*Statistics 2013*, declarado y organizado por Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability (ISI), junto con American Statistical Association, Institute of Mathematical Statistics, International Biometrics Society y Royal Statistical Society), que sucedió al Día Mundial de la Estadística (20 de octubre de 2010, declarado por United Nations Statistics Division), entre otras acciones, me ha permitido comprender de forma más cercana el verdadero alcance de la importancia del esfuerzo colectivo y organizado, muchas veces derivado de iniciativas creativas e incluso visionarias individuales, en la promoción del desarrollo del conocimiento.

Asumo, pues, este hecho con plena consciencia de la responsabilidad que supone formar parte de esta insigne e ilustre institución, cuya historia está íntimamente ligada a la contribución excepcional que nuestro entorno académico ha hecho en el tiempo a la Ciencia. Pero, sobre todo, es una nueva oportunidad de formar parte activa en iniciativas dirigidas a la promoción de la Ciencia, en un contexto multidisciplinar integrado. Espero, en esta nueva circunstancia, poder contribuir a los objetivos de la Academia en sus diferentes ámbitos de actuación, y, en este contexto, a potenciar el reconocimiento al papel fundamental (y, también, transversal) que la Probabilidad y la Estadística han tenido y tienen en el desarrollo del conocimiento y el progreso de la Sociedad.

Para esta lectura he elegido como título *La Teoría Moderna de Medidas de Riesgo, en el Contexto de la Complejidad*. La razón de esta elección tiene que ver directamente con la propia evolución de mis intereses, y los de mi equipo, en investigación, y también con el hecho de que esta disciplina científica, como parte de la que podemos denominar «Ciencia del Riesgo», constituye un ámbito fundamental en pleno proceso de cimentación y desarrollo, aún relativamente reciente, de base probabilística y estadística, que me parece realmente relevante y atractivo por sus múltiples implicaciones de carácter científico, económico y social.

El *riesgo* constituye un aspecto central, básico, como factor y motor, en el desarrollo humano, individual y colectivamente. La valoración del riesgo forma parte inherente del proceso de toma de decisiones al que de forma permanente está sometida la acción humana en la adaptación al medio y la supervivencia, en sentido amplio. La necesidad de entender el riesgo desde una perspectiva racional ha llevado, en distintos ámbitos, a la formulación y el uso de herramientas específicas con el fin de cuantificar a partir del conocimiento objetivo y empírico, también de apreciaciones de carácter subjetivo, los niveles de riesgo en situaciones reales concretas o posibles escenarios. El punto en el que puede apreciarse el nacimiento de una disciplina propia ocurre cuando se llevan a cabo esfuerzos por definir y establecer un concepto abstracto de medida de riesgo, como raíz de una teoría formal.

En este discurso trato de identificar aspectos relevantes en el proceso de gestación y conformación de esta nueva disciplina, la Teoría de Medidas de Riesgo. Dos factores intrínsecos, desde el punto de vista conceptual y epistemológico, son *incertidumbre* y *complejidad*.

# 1. Aproximación científica a la medición del *riesgo*: aspectos históricos y epistemológicos

La palabra *riesgo* está presente en el lenguaje común, cotidiano, como reflejo de la importancia que este concepto tiene en múltiples dimensiones de la vida humana.

La Real Academia Española, en su actual edición del *Diccionario de la Lengua Española*, define como acepción general de la palabra *riesgo*: «contingencia o proximidad de un daño». En esta expresión simple y concisa se identifican los elementos esenciales que constituyen la base de la aproximación científica al riesgo:

- «contingencia», en referencia a la simple contemplación de la disyuntiva de que algo pueda o no suceder, aspecto que liga intrínsecamente el concepto de riesgo a un ambiente de incertidumbre;
- «proximidad», en referencia a la valoración cuantitativa o cualitativa –en un sentido de grado (preciso o vago) de predecibilidad– sobre las posibilidades en dicha disyuntiva;
- «daño», en referencia al carácter negativo atribuido a los efectos de la eventual ocurrencia del suceso en consideración.

Con diferentes alternativas, similares acepciones pueden encontrarse en la mayoría de las lenguas, destacándose algunas especificidades interesantes de índole contextual o cultural. Entre estas, cabría señalar la consideración, más o menos enfatizada, del *riesgo* en el sentido de *reto*, tanto frente a un *peligro* como a una *oportunidad*. Subyace a este aspecto la idea de que, ulteriormente, la valoración del riesgo tiene generalmente como finalidad la decisión sobre una determinada acción (bien en el sentido de acometer o no un proceso de forma voluntaria, bien en cuanto a la gestión anticipada o posterior de posibles efectos asociados a fenómenos inevitables o parcialmente controlables, sean estos de índole antropogénica o natural, etc.). En Finanzas, por ejemplo, el inversor usualmente trata de evaluar el riesgo asociado a una determinada estrategia, enfrentándose a un problema de optimización; en Geofísica, Medio Ambiente, Ingeniería, etc., puede plantearse un escenario análogo, si bien con frecuencia se trata de derivar una cuantificación del riesgo a partir de una modelización apropiada de un fenómeno natural, por ejemplo, con objetivos de prevención, salvo disponer de la capacidad de intervención de algún modo sobre el comportamiento del sistema.

Existe una extensa literatura acerca de la historia del concepto de riesgo, incluso desde una perspectiva probabilística y estadística. No es el propósito de este discurso desarrollar en detalle este contenido[1]. Haré sólo referencia, mediante algunas notas ilustrativas, a aspectos significativos que tienen relación directa con el eje argumental de la exposición.

Dale (1999), en su revisión histórica sobre probabilidad inversa, incluye una breve referencia al primer artículo del tratado *Miscellanies. Or a Miscellaneous Treatise; Containing Several Mathematical Subjects*, publicado en 1776, escrito por el considerado excéntrico y autodidacta matemático William Emerson (1701-1782), titulado «The Laws of Chance», donde el autor establece, entre un conjunto de «definiciones» y «axiomas»:

> [...]
>
> Def. IV. *Risk* is the value of the stake considered with the probability of loosing it; & therefore is the product of its value multiplied by the probability of loosing it.
>
> [...]

(Cabe mencionar que en la «Def. III. *Expectation*...» W. Emerson da una formulación análoga referida a probabilidades de ganancias en juegos de azar).

Aún no tratándose de una referencia especialmente relevante, o influyente desde la perspectiva de la fundamentación de la Probabilidad y la Estadística, sí me parece significativa acerca de una conceptualización formal ya muy al uso en su tiempo. Se enfatiza en esta y en otras referencias, de forma recurrente, la idea fundamental, basada en la intuición y en la práctica, de que, conocidas las

[1]Véanse, como ejemplo, Aven (2012), Luhmann (1993), Pradier (2004), Zachmann (2014), entre otros.

cantidades *probabilidad* ($P$) [de que un suceso ocurra] y *efecto* ($E$) [(en términos de *pérdida*) de la ocurrencia del suceso], el *riesgo* ($R$) [asociado al suceso] debe definirse (calcularse) como

$$R = P \times E. \tag{1}$$

Esta relación básica de proporcionalidad directa ha prevalecido, en un sentido que podríamos calificar como intrínseco o «genético», aunque de forma flexible, en el desarrollo posterior de la que actualmente se tiende a denominar *Teoría [Moderna] de Medidas de Riesgo* (en adelante, TMR).

El astrónomo, físico y matemático francés Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827) hace referencia al concepto de riesgo en su tratado *Essai Philosophique sur les Probabilités*, publicado en 1814 (cuando aún poseía solo el título de Conde), desde el punto de vista del balance «pérdidas-ganancias», a través del concepto de *esperanza matemática*, donde las cantidades elementales del tipo (1) (observando que una «ganancia» sería equivalente en este contexto a una «pérdida negativa») se agregan aditivamente sobre el conjunto de resultados posibles:

> *De l'Espérance.*
>
> La probabilité des évènemens sert à déterminer l'espérance ou la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot espérance a diverses acceptions: il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que probables. Cet avantage, dans la théorie des hasards, est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir: c'est la somme partielle qui doit revenir lorsqu'on ne veut pas courir les risques de l'évènement, en supposant que la répartition se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette répartition est la seule équitable, lorsqu'on fait abstraction de toutes circonstances étrangères; parce qu'un égal degré de probabilité donne un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*.
>
> VIII$^{\text{e}}$ Principe. Lorsque l'avantage dépend de plusieurs évènemens, on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque évènement, par le bien attaché à son arrivée.
>
> [...]

IX$^{e}$ Principe. Dans une série d'évènemens probables, dont les uns produisent un bien, et les autres une perte, on aura l'avantage qui en résulte en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque évènement favorable par le bien qu'il procure, et en retranchant de cette somme celle des produits de la probabilité de chaque évènement défavorable par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte.

[...]

Siendo la esperanza matemática un operador lineal, se plantea un problema de identificación del riesgo con respecto a la elección de la escala de medición de la función de pérdidas. Un ejemplo histórico cercano a esta cuestión es la llamada «Paradoja de San Petersburgo»[2]. En 1738, Daniel Bernoulli (1700-1782), sobrino de Jakob Bernoulli[3], publicó su ensayo «Specimen theoriae novae de mensura sortis» (*Comentarii Academiae Scientarium Imperialis Petropolitanae*, Tomus V, 175-192)[4], en el que daba solución a la paradoja que le propuso su hermano Nicolaus Bernoulli, en relación con un juego cuya ganancia esperada resultaba en una serie de suma infinita y, por tanto, matemáticamente ventajoso ante cualquier suma apostada. D. Bernoulli resolvió esta cuestión sugiriendo y justificando formalmente («Corolario II») la adopción lógica, salvo otras consideraciones subjetivas, de una escala logarítmica en la valoración de posibles ganancias en términos de *utilidad*:

---

[2]Véase, por ejemplo, entrada en Stanford Encyclopedia of Phylosophy, http://plato.stanford.edu/entries/paradox-stpetersburg/ (Martin 2014b)

[3]La celebración del Año Internacional de la Estadística en 2013 (*Statistics2013*) fue promovida y organizada por Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability (ISI), junto con American Statistical Association, Institute of Mathematical Statistics, International Biometrics Society y Royal Statistical Society, con motivo del 300.º aniversario de la publicación póstuma de la obra *Ars Conjectandi* de Jakob Bernoulli (1654-1705), por su sobrino Nicolaus Bernoulli (1687-1759), en 1713, y del 250.º aniversario de la publicación, también póstuma, de «An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances», de Thomas Bayes (1702-1761), en 1763.

[4]Véase también traducción inglesa titulada «Exposition of a new theory on the measurement of risk», *Econometrica* vol. 22(1), 23-36, 1954

> [...] in the absence of the unusual, the utility resulting from any small increase in wealth will be inversely proportionate to the quantity of goods previously possessed.

Sus ideas, apreciadas y recogidas por diversos matemáticos de relevancia histórica desde su publicación, se consideran origen de la Teoría de la Utilidad y se relacionan con los conceptos de *percepción del riesgo* y, desde una posición de valoración de pérdidas, *aversión al riesgo*. P.S. Laplace, con expreso reconocimiento al principio postulado por D. Bernoulli, establece en el último capítulo de su tratado *Théorie Analitique des Probabilités*, publicado en 1812, una aproximación cuantitativa al concepto de *esperanza moral* («Chapitre X *De L'Esperance Morale*») –frente a la *esperanza matemática*, en relación con las ganancias– justificando los aspectos formales relativos a su cálculo matemático. En una forma de expresión más significativa, en *Essai Philosophique sur les Probabilités*, «*De l'Espérance*», continúa y concluye diciendo:

> [...] IX$^{e}$ Principe. [...] l'avantage moral qu'un bien nous procure n'est pas proportionnel à ce bien, [...] il dépend de mille circonstances souvent très difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc distinguer dans le bien espéré sa valeur absolue de sa valeur relative: celle-ci se règle sur les motifs qui le font désirer, au lieu que la première en est indépendante. On ne peut donner de principe général, pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par Daniel Bernoulli, et qui peut servir dans beaucoup de cas.
>
> X$^{e}$ Principe. La valeur relative d'une somme infiniment petite est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée. Cela suppose que tout homme a un bien quelconque dont la valeur ne peut jamais être supposée nulle. En effet, celui même qui ne possède rien, donne toujours au produit de son travail et à ses espérances une valeur au moins égale à ce qui lui est rigoureusement nécessaire pour vivre.
>
> Si l'on applique l'analyse au principe que nous venons d'exposer, on obtient la règle suivante.

> En désignant par l'unité la partie de la fortune d'un individu, indépendante de ses expectatives; si l'on détermine les diverses valeurs que cette fortune peut recevoir en vertu de ces expectatives et leurs probabilités, le produit de ces valeurs élevées respectivement aux puissances indiquées par ces probabilités, sera la fortune physique qui procurerait à l'individu le même avantage moral qu'il reçoit de la partie de sa fortune, prise pour unité, et de ses expectatives; en retranchant donc l'unité de ce produit, la différence sera l'accroissement de la fortune physique, dû aux expectatives: nous nommerons cet accroissement, *espérance morale*. Il est facile de voir qu'elle coïncide avec l'espérance mathématique, lorsque la fortune prise pour unité, devient infinie par rapport aux variations qu'elle reçoit des expectatives. Mais lorsque ces variations sont une partie sensible de cette unité, les deux espérances peuvent différer très sensiblement entre elles.
>
> Cette règle conduit à des résultats conformes aux indications du sens commun, que l'on peut par ce moyen, apprécier avec quelque exactitude.
>
> [...]
>
> Le désavantage des jeux, l'avantage de ne pas exposer au même danger tout le bien qu'on attend, et tous les résultats semblables indiqués par le bon sens, subsistent, quelle que soit la fonction de la fortune physique qui, pour chaque individu, exprime sa fortune morale. Il suffit que le rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement de la fortune physique, diminue à mesure que celle-ci augmente.

Por último, mencionaré la definición de *riesgo* dada en la obra *A Dictionary of Statistical Terms*, (cito textualmente) «prepared for the International Statistical Institute with the assistance of the UNESCO by Maurice G. Kendall and William R. Buckland», en 1957:

> **Risk**
>
> This word occurs in statistics in its ordinary sense, and, apart from actuarial statistics, has one specialisation in the theory of Decision Functions. Where a number of possible decisions have a loss function attached, the risk is the expected cost of the experimentation plus the expected value of the loss function.

The risk *function* is the value of the risk taken for different decision functions.

La consideración del riesgo como componente fundamental en un problema de decisión constituye, en efecto, la identidad central de la Teoría de la Decisión. En la Teoría Clásica de la Decisión Estadística (Wald 1950; véanse también Berger 1980, DeGroot 1970, Liese y Miescke 2008, Pratt et al. 1995, etc.), el riesgo se interpreta primariamente como el valor esperado de la pérdida asociada a una determinada estrategia o regla de decisión (elección aleatorizada o no aleatorizada de una acción a partir de la información empírica disponible) en ambiente de incertidumbre; esta última, la incertidumbre, se asocia usualmente a fuentes de diferente índole: aleatoriedad inherente al fenómeno o proceso en consideración (incertidumbre *estocástica*), incompletitud de conocimiento sobre el fenómeno o proceso (incertidumbre *cognitiva*) e información parcial de magnitudes observables (incertidumbre *epistémica*). El problema de decisión se formaliza, en este contexto, como un problema de optimización, que se resuelve bajo restricciones convenientes y mediante la consideración de funcionales apropiados con fines de comparación entre funciones de riesgo asociadas a distintas reglas de decisión. Muchos problemas de índole estadística pueden formularse bajo este paradigma general.

Frente al uso exclusivo de la esperanza matemática, parece razonable considerar diferentes características de la distribución de probabilidad asociada a las pérdidas como posibles medidas alternativas del riesgo, según el objetivo de referencia en cada situación. Se plantea, en este caso, la cuestión sobre la prevalencia de la idea o principio de proporcionalidad integrada en la valoración del riesgo.

En la TMR se propone una formalización genérica, abstracta, del concepto de medida de riesgo como un funcional con argumento la variable o función aleatoria que representa las pérdidas, y se definen, en términos axiomáticos, diferentes clases de medidas de riesgo que atienden a principios u objetivos convenientes. En el desarrollo de esta teoría, tanto por razones teórico-metodológicas como de interpretación, se ha puesto especial énfasis (aunque no de forma exclusiva) en la investigación sobre medidas de riesgo basadas en cuantiles; e.g. *Valor en Riesgo* (VaR), *Déficit Esperado* (ES, también denominado *Valor en Riesgo Promedio*, AVaR, o *Valor en Riesgo Condicional*, CVaR) o, en su forma general, *medidas espectrales* en términos de alguna densidad de ponderación de los cuantiles. En cierto sentido, se adopta en esta línea una perspectiva conceptualmente próxima a la Teoría de Valores Extremos[5], donde el objeto a valorar, desde el punto de vista del riesgo, es la posible ocurrencia de valores en la cola positiva de la distribución de probabilidad asociada a la función de pérdidas (equivalentemente, la cola negativa en la distribución de probabilidad asociada a la función de ganancias); e.g. Kriele y Wolf (2014), en el ámbito actuarial, Malevergne y Sornette (2006), en el ámbito financiero, etc. En esta exposición consideraré formalmente el caso de funciones de pérdida. En aplicaciones en Geofísica, Medio Ambiente o Ingeniería, es usual en la práctica, en muchos casos, el interés en evaluar en términos de riesgo las posibles excedencias de una magnitud sobre un umbral crítico prefijado, no importando el valor concreto de la magnitud en caso de no excedencia, y sí el valor del exceso en caso de excedencia. A este aspecto me referiré más adelante (véase apartado 2.3).

En el apartado 2 analizaré algunos aspectos básicos del desarrollo de la TMR y me referiré a algunas direcciones relevantes de la investigación reciente. Trataré asimismo de enfatizar ciertos aspectos de desarrollo paralelo y, al mismo tiempo, aún la necesidad de intensificar la interacción entre la TMR y los avances en la representación de sistemas complejos.

[5]En este punto, debe observarse que la Teoría de Valores Extremos tiene un enfoque predominantemente asintótico, con el objetivo preliminar de caracterizar las distribuciones límite y los correspondientes dominios de atracción a través de «teoremas de límite extremal»: la Distribución de Valores Extremos Generalizada (o «de von Mises», quien propuso una parametrización única a partir de las distribuciones tipo extremales de Gumbel, Fréchet y Weibull), en el caso de máximos por bloques, y la Distribución de Pareto Generalizada, en el caso de excesos sobre un umbral. Existen numerosos textos con una exposición estructurada acerca de los aspectos fundamentales de esta disciplina, con una base sólidamente establecida y reconocida; entre otros, citaré como referencia Beirlant et al. (2004), Castillo et al. (2005), Coles (2001), Embrechts et al. (1997), Galambos (1978), Gumbel (1958), Kotz y Nadarajah (2000), Leadbetter et al. (1983), Reiss y Thomas (2007), Resnick (1987, 2007).

## 1.1. Sobre las aportaciónes multidisciplinares a la identificación y valoración del riesgo

El análisis de riesgos constituye uno de los objetivos centrales de la investigación y la práctica en múltiples campos de aplicación (Medicina y Salud; Geofísica, Medio Ambiente y Recursos Naturales; Biología y Ecología; Agricultura, Ganadería y Pesca; Economía y Finanzas; Seguros; Ingeniería, Transporte e Industria; Información y Comunicaciones; Criminología, etc., etc.). Son innumerables las publicaciones, diseminadas en textos y revistas científicas de toda índole, que hacen referencia a objetivos de valoración del riesgo, tanto en relación con fenómenos o procesos antropogénicos como naturales, como he mencionado anteriormente, aspecto este último que en muchos casos conlleva diferencias de aproximación. También son muchas las instituciones, sociedades y foros cuya actividad está orientada a la evaluación y gestión de riesgos. Generalmente, un estudio o proyecto sobre riesgos tiene una dimensión multi- e interdisciplinar, de forma que el desarrollo de este ámbito del conocimiento se caracteriza, por una parte, por una importante diversificación de enfoques conceptuales y metodológicos, y, por otra, por la necesidad de identificar y establecer los elementos y relaciones que pueden considerarse como esenciales desde una perspectiva holística.

La incertidumbre es una componente intrínseca del concepto de riesgo. Desde el punto de vista epistemológico, la probabilidad (como formalización matemática) ha constituido el principal instrumento para la valoración cuantitativa de la incertidumbre y el tratamiento estadístico en la evaluación del riesgo. En ocasiones, esta última tiene un carácter de diagnóstico sobre una situación presente; otras veces, el riesgo se entiende desde un punto de vista predictivo (en este contexto, tiene importancia el concepto de *predecibilidad* sobre el comportamiento de un sistema; véase, por ejemplo, Kantz et al. 2006).

Debe enfatizarse la diferencia conceptual entre *medida de riesgo* e *indicador de riesgo*. De forma general, se consideran como indicadores de riesgo variables directamente relacionadas con alguna magnitud simple o, más generalemente, el resultado de la agregación sintética de un conjunto de magnitudes (se suele hablar de *índices* en este caso), que son utilizados como referencia de posibles resultados o efectos negativos en el comportamiento de un sistema. Las medidas de riesgo son funciones matemáticas específicamente definidas a propósito de cuantificar, en algún sentido, los niveles de riesgo relativos a una variable o función aleatoria dada (en particular, un indicador de riesgo). Precisamente, uno de los principales objetivos en los diferentes campos de aplicación es la especificación de indicadores o índices apropiados. En relación con el análisis de comportamientos extremos en procesos espacio-temporales interesan, como ejemplo, indicadores relativos a recurrencia, persistencia, patrones de agregación o inhibición, caracteristicas morfológicas, cambios estructurales dinámicos (e.g. formación y evolución de *hotspots*), clasificación tipológica, etc., de los eventos. Diversos enfoques metodológicos y herramientas analíticas se adoptan para la investigación en este contexto, incluyendo geometría diferencial, geometría estocástica, procesos puntuales, técnicas de análisis de agrupamientos y clasificación, técnicas de análisis multiescalar, etc.

Desde el punto de vista estadístico, se plantea el problema de que, en general, la distribución de un indicador, particularmente en el caso de indicadores agregados, no suele ser conocida, disponiéndose solo de información parcial empírica o histórica, directamente observable o indirecta. La simulación y el análisis de sensibilidad, así como el diseño de la observación, a partir de la caracterización de la dinámica del sistema mediante un modelo que represente de forma adecuada su complejidad, juegan un papel importante en este contexto. El éxito en la valoración del riesgo dependerá, en buena parte, de la habilidad del investigador en la determinación y caracterización de los (tipos de) indicadores o índices apropiados, de la elección de (clases de) medidas de riesgo adecuadas según los objetivos (atendiendo a diversos *principios*, usualmente inspirados en las necesidades de aplicación en ciertos campos, tratabilidad matemática e interpretación) y de la eficiencia en su implementación (estadístico-computacional) práctica.

La cuantificación probabilística y estadística del riesgo –y, como soporte, la propia TMR– se sitúa como núcleo fundamental en el marco de los estudios o proyectos de valoración del riesgo para la toma de decisiones, donde suelen distinguirse de forma general dos aspectos complementarios e interactivos: *Evaluación del Riesgo* y *Gestión del Riesgo*. El primer concepto, la Evaluación del Riesgo, se refiere al proceso de ganancia de conocimiento acerca de la naturaleza y peso de los riesgos implicados en una actividad, y la puesta de dicho conocimiento en algún entorno de relaciones que exprese su significación; generalmente, se basa en una síntesis de aspectos científicos y especulativos. El segundo concepto, la Gestión del Riesgo, se refiere a la toma de decisiones para influir sobre el balance entre ganancias y pérdidas (en un sentido amplio), así como sobre la distribución de ambas; se suelen considerar tres aspectos básicos en este ámbito: *prevención* de causas, *reducción* de probabilidades de ocurrencia y *mitigación* o *remediación* de consecuencias. La investigación en la compleja «Ciencia del Riesgo» incluye otras dimensiones complementarias de especial relevancia como la percepción o la comunicación del riesgo, etc., donde están implicadas múltiples disciplinas (Psicología, Sociología, Economía, Gestión, etc.), así como aspectos regulatorios o de diagnóstico y toma de decisiones por distintos organismos (FMI, OMS, ISO, etc.), etc. Existen numerosos textos y compendios[6] orientados a la exposición desde una perspectiva contextual amplia en relación con el riesgo, con profusión de referencias a muy diferentes casuísticas y enfoques multidisciplinares de análisis.

La identificación de paradigmas comunes, y también específicos, en la problemática y aportaciones derivadas desde distintos campos de aplicación ha inspirado, en gran medida, los fundamentos de la TMR. Como ya he señalado, la asimilación de la complejidad de la dinámica de sistemas constituye un aspecto central en su desarrollo.

[6]Véanse, por ejemplo, Aven y Ortwin (2010), Bedford y Cooke (2001), El-Shaarawi y Piegorsch (2012), Haimes (2009), Klüppelberg et al. (2014), Kumamoto y Henley (2000), McNeil et al. (2005), Melnick y Everitt (2008), de Rocquigny (2012), etc.

# 2. La Teoría Moderna de Medidas de Riesgo: asimilación de la *complejidad*

(En esta exposición adoptaré un enfoque de carácter predominantemente divulgativo, tratando de restringir los aspectos formales al mínimo que considero apropiado para la introducción de algunos elementos básicos, y prescindiendo de detalles que serían necesarios para una presentación de estricto rigor.)

Especialmente en las últimas dos décadas, se ha desarrollado de forma intensificada, como he mencionado en el apartado 1, el proceso de construcción de una teoría matemática, de base probabilística, sobre medidas de riesgo, con frecuencia referida como la *Teoría [Moderna] de Medidas de Riesgo*[7]. Su origen se establece a partir de la identificación de ciertos paradigmas comunes del análisis de riesgos en distintas disciplinas (Finanzas, Seguros, Ingeniería, Geofísica, Medio Ambiente, Medicina y Salud, etc.) y de su consiguiente formalización abstracta.

En su forma más elemental, dado un espacio de probabilidad, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, se define una *medida de riesgo*, $\rho$, como un funcional,

$$\rho : \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \bar{\mathbb{R}},$$

bajo ciertas especificaciones a precisar, donde $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es algún subespacio lineal del espacio $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de funciones Borel-medibles (variables aleatorias) definidas sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Con frecuencia, $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ será algún espacio $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $p \in [1, +\infty]$.

Ha sido muy habitual en la práctica considerar medidas de riesgo definidas *ad hoc* en términos de momentos o, popularizadas en décadas más recientes en ciertos ámbitos, en términos de cuantiles. A ello ha contribuido en gran parte el

[7]También, a veces, *Teoría* Moderna *del Riesgo*; con el calificativo «moderna» se establece la distinción con respecto a las también denominadas precedentemente como «teorías matemáticas del riesgo», por otra parte muy desarrolladas, *ad hoc* o con base en el cálculo estocástico, sobre modelos representativos de procesos específicos –e.g. «procesos de (número de) reclamaciones», «procesos de ruina»– en diferentes campos de aplicación, especialmente en los ámbitos financiero y actuarial; véanse, por ejemplo, Bühlmann (1970), Daykin et al. (1994), Grandell (1991), Rolski et al. (1999), Ross (1999), Steele (2001), etc.

conocimiento sobre sus propiedades analíticas, su facilidad de implementación y su interpretación.

En la formulación y estudio de medidas de riesgo, en el contexto del desarrollo reciente de la teoría, se han adoptado dos enfoques, que podríamos denominar «comprensivo» y «extensivo». El enfoque comprensivo se dirige a la formulación de *principios axiomáticos* que definen conceptualmente *clases* de medidas de riesgo en términos de propiedades exigibles bajo ciertos paradigmas. Dichas clases representan, pues, modelos implícitos de referencia. El enfoque extensivo consiste en la formulación de *familias* de medidas de riesgo mediante modelos explícitos, generalmente bajo criterios de representación flexible de ciertas características potenciales en el fenómeno subyacente; en este caso, se trata de estudiar sus propiedades analíticas y, en particular, la verificación o no de axiomas o principios axiomáticos.

## 2.1. Sobre *coherencia* y otros principios

Entre los principios axiomáticos de mayor relevancia se encuentran el principio de *coherencia* y el principio de *convexidad*[8].

Una medida de riesgo, $\rho$, se dice *coherente* si satisface los siguientes axiomas:

(A1) *Invariancia ante traslaciones* $\quad \rho(X+c) = \rho(X) + c$, para $c \in \mathbb{R}$

(A2) *Monotonía* $\quad X \leq Y$ c.s. $\Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

(A3) *Homogeneidad positiva* $\quad \rho(aX) = a\rho(X)$, para $a > 0$

(A4) *Subaditividad* $\quad \rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

[8] Otras propuestas en la literatura reciente sobre *principios* o sobre *axiomas* específicos incluyen «consistencia», «invariancia en ley», «(sub)aditividad comonotónica», «dominancia estocástica en media y de segundo orden», «medidas de riesgo actuariales», etc.; véanse, por ejemplo, Deelstra et al. (2011), Goovaerts et al. (2004), Kou et al. (2013), Kusuoka (2001), Rockafellar et al. (2006), Wang y Dhaene (1998), Wang et al. (1997), etc.

(para cualesquiera $X, Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{F}, P)$). En particular, la esperanza matemática es una medida de riesgo coherente.

Esta definición, propuesta por Artzner et al. (1997, 1999), bajo una motivación y en un lenguaje directamente ligados al ámbito financiero, en realidad supuso un hito en el cambio de concepción de la teoría (matemática) del riesgo hacia una «teoría de principios»[9]. Su introducción ha generado una muy extensa literatura posterior (probablemente, en aquel momento sus autores no eran conscientes del alcance que tendría este trabajo), tanto en la búsqueda de familias de medidas de riesgo bajo el cumplimiento de ese principio, como acerca de la discusión crítica sobre el mismo y la propuesta de principios alternativos.

El principio de *convexidad*, introducido formalmente por Föllmer y Schied (2002) y Frittelli y Gianin (2002), también desde una motivación en el ámbito financiero, se establece a partir de la relajación del principio de coherencia, bajo los siguientes axiomas:

(A1) *Invariancia ante traslaciones* $\quad \rho(X + c) = \rho(X) + c$, para $c \in \mathbb{R}$

(A2) *Monotonía* $\quad X \leq Y$ c.s. $\Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$

(A5) *Convexidad* $\quad \rho(aX + (1-a)Y) \leq a\rho(X) + (1-a)\rho(Y)$, para $a \in [0, 1]$

Los autores defienden con este principio que, en ciertas situaciones, no es razonable asumir que el riesgo tenga un crecimiento directamente proporcional con respecto a la variable o función de pérdida.

Más allá de su valor conceptual y epistemológico (como «forma de pensamiento» práctico), la relevancia de ambos principios y de algunas extensiones sobre los mismos (e.g. $\varphi-$coherencia y $\varphi-$convexidad; véase Laeven y Stadje 2013) se justifica por la posibilidad de establecer *teoremas de representación dual*, resultados centrales de la teoría que tienen importancia desde el punto de vista analítico y metodológico.

---

[9] Hay que destacar, no obstante, que, en el contexto de la Teoría de la Utilidad, Yaari (1987) propuso los principios de una «teoría dual de elección bajo riesgo» en la que se encuentran elementos que, más adelante, también han tenido importancia en aportaciones a la TMR.

Bajo condiciones débiles apropiadas, según el escenario[10], el principal resultado de referencia de la teoría establece que toda medida de riesgo coherente, $\rho$, admite una representación dual de la forma

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[X], \tag{2}$$

para alguna clase, $\mathcal{Q}$, de medidas de probabilidad absolutamente continuas con respecto a la medida de probabilidad $P$ en el espacio de probabilidad base, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (en notación usual, $Q \ll P$, para cada $Q \in \mathcal{Q}$). En la expresión (2), la clase $\mathcal{Q}$ (interpretada como un conjunto de «escenarios generalizados») es independiente de la variable pérdida $X$; es decir, se dice que $\rho$ es *representable* mediante la clase $\mathcal{Q}$. Recíprocamente, si una medida de riesgo tiene una representación del tipo (2), entonces ha de cumplir el principio de coherencia. Es importante destacar (como propiamente reconocen en su artículo Artzner et al. 1999), que este resultado ya fue formalmente establecido por Huber (1981) en un contexto general en relación con robustez estadística, acerca de las condiciones de «representabilidad» (recíproca) de clases de medidas de probabilidad en términos de funcionales no lineales conjugados sobre dichas clases[11].

Con referencia a la idea original, en estudios precursores (filosóficos y analíticos) mencionados en el apartado anterior y otros, acerca de la cuantificación del riesgo, este resultado puede interpretarse en un cierto sentido flexible de prevalencia bajo el principio de *coherencia* de la concepción [regla, o criterio] de proporcionalidad integrada de la pérdida (transformada) en la medición del riesgo. En efecto, la condición $Q \ll P$ implica

$$E_Q[X] = E_P[X \cdot f],$$

[10]Véanse, por ejemplo, Artzner et al. (1999), Delbaen (2002), Föllmer y Schied (2002, 2011), Frittelli y Gianin (2005), Jouini et al. (2004, 2006), Kusuoka (2001), etc.; véanse también, entre otros, los trabajos de revisión de Balbás (2007), Krokhmal et al. (2011), Rockafellar y Uryasev (2013), etc.

[11]Sorprende, no ya sólo que en esta referencia de 1981 no se hace mención explícita a la utilidad potencial de este resultado desde el punto de vista de la medición del riesgo, sino que en la reedición posterior de Huber y Ronchetti (2009) tampoco aparece tratado este aspecto, ni se cita el trabajo de Artzner et al. (1999).

donde $f$ es la derivada de Radon-Nikodym (densidad no negativa) de $Q$ respecto de $P$.

Para medidas de riesgo convexas, esta representación dual puede extenderse, de nuevo como condición necesaria y suficiente y bajo condiciones apropiadas, en la forma (véanse, por ejemplo, Föllmer y Schied 2002, Frittelli y Gianin 2002, Krokhmal et al. 2011)

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{P}} \left( E_Q[X] - \alpha(Q) \right),$$

donde, en este caso, la clase $\mathcal{P}$ representa, en principio, una subclase de medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ no necesariamente $P-$absolutamente continuas (solo bajo ciertas condiciones; véase, por ejemplo, Frittelli y Gianin 2002) y $\alpha(\cdot)$ es una cierta *función de penalización* sobre $\mathcal{P}$. Esta función cumple $\alpha(Q) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \left( E_Q[X] - \rho(X) \right) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \left( E_Q[X] \right)$, siendo $\mathcal{X}$ la clase de todas las variables aleatorias definidas sobre el espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y $\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$ el *conjunto de aceptación* de la medida de riesgo $\rho$.

Puesto que $E_Q[X] - \alpha(Q) = E_Q[X - \alpha(Q)]$, de nuevo podríamos entender que, en un cierto sentido de «representabilidad generalizada», se atendería al principio de proporcionalidad integrada mencionado, bajo cambio de la medida y penalización relacionada de la variable o función de pérdida.

La propiedad de convexidad de las medidas de riesgo convexas y, en particular, coherentes y la convexidad (en el sentido de conjuntos) de las clases de medidas convexas y medidas coherentes, así como de las clases de medidas de probabilidad que las representan, conjuntamente con el interés desde el punto de vista probabilístico en el comportamiento relativo a las colas de las distribuciones, justifican la importancia del Análisis Convexo y la Teoría de Grandes Desviaciones[12] en este contexto.

[12]Cabe recordar que S.R. Srinivasa Varadhan recibió, entre otros reconocimientos, el *Premio Abel 2007*, «por sus contribuciones fundamentales a la Teoría de la Probabilidad y en particular por crear una Teoría de Grandes Desviaciones unificada». Entre otros textos relacionados con esta última, véanse Dembo y Zeitouni (2009), Ellis (2006), Varadhan (1984, 2008), etc.

## 2.2. Generación de familias de medidas de riesgo. Distorsión y deformación

Uno de los principales objetivos de la TMR consiste en la formulación de familias flexibles de medidas de riesgo que, bajo el cumplimiento de determinados principios o axiomas, permitan una representación adecuada y, al mismo tiempo, una implementación eficiente, así como el estudio pormenorizado de distintos aspectos analíticos y metodológicos relacionados. Cabría distinguir dos tipos de enfoques al respecto: formulaciones directas, basadas en características (momentos, cuantiles, etc.) de las distribuciones de las funciones de pérdidas, y formulaciones indirectas, basadas en teoremas de representación; en particular, con respecto a estas últimas, teoremas de representación dual[13] (e.g. a través de la especificación de la clase $\mathcal{Q}$ en el caso de medidas coherentes, o de la clase $\mathcal{P}$ y la función de penalización $\alpha(\cdot)$ en el caso de medidas convexas). Me referiré a algunas medidas de especial relevancia. (Por simplicidad, restringiré en su mayor parte la exposición al caso de distribuciones continuas.)

Una de las medidas que mayor atención han recibido en los ámbitos financiero y actuarial es el *Valor en Riesgo* (VaR, de «Value at Risk»). Para $\alpha \in [0,1]$, se define

$$\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X) := \text{ínf}\{x \in \mathbb{R} : F_X(x) \geq 1-\alpha\},$$

es decir, el $(1-\alpha)-$cuantil inferior para la función de distribución acumulativa (FDA), $F_X$, de la variable aleatoria pérdida, $X$, interpretándose como la mínima pérdida en que se incurrirá en el $100\alpha\,\%$ menos favorable de los posibles escenarios. Para $\alpha = 0$, se tiene $\mathrm{VaR}_1(X) = \operatorname{ess\,sup}(X) =: \rho_W(X)$, denominada *worst-case risk measure*.

Cabe observar que, con respecto a la idea original sobre cómo cuantificar el riesgo, el VaR significa en cierto modo un cambio de concepto, en el sentido de que en lugar de fijar un evento y calcular el riesgo en términos del producto $P \times E$, se fija como referencia un porcentaje (como valoración de *probabilidad*) de posibles

[13]En el desarrollo de la teoría ha tenido también repercusión el enfoque de representación introducido por Kusuoka (2001) para medidas coherentes invariantes en ley.

escenarios adversos, para determinar entonces el cuantil inferior (como valoración del *efecto* mínimo) correspondiente[14].

Esta medida no cumple el principio de coherencia (no satisface, en general, el axioma de subaditividad, aunque sí el resto de axiomas). La razón subyacente está ligada al hecho de que no tiene en cuenta la cola residual de la distribución de pérdidas sobre el valor de referencia $(1-\alpha)$. Una alternativa que ha recibido especial atención desde la publicación del trabajo de Artzner et al. (1999) es la medida de riesgo denominada *Déficit Esperado* (ES, de «Expected Shortfall»; también, *Valor en Riesgo Promedio* o *Valor en Riesgo Condicional*): para $\alpha \in [0,1]$, se define

$$\mathrm{ES}_{1-\alpha}(X) := \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} \mathrm{VaR}_p(X)dp.$$

Para distribuciones continuas, coincide con la esperanza residual:

$$\mathrm{ES}_{1-\alpha}(X) = E[X|X \geq \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X)].$$

Para $\alpha = 1$, en este caso, se tiene $\mathrm{ES}_0(X) = E[X]$; para $\alpha = 0$, de nuevo $\mathrm{ES}_1(X) = \operatorname{ess\,sup}(X) =: \rho_W(X)$. La medida ES cumple el principio de coherencia, siendo la menor entre las medidas de riesgo coherentes e invariantes en ley que dominan a VaR (en un sentido general, esta condición de dominancia sobre VaR se refiere a veces en la literatura como un axioma de «consistencia», hablándose también de *medidas de riesgo de déficit*[15]). (Más adelante me referiré al valor trascendente que esta medida ha tenido desde el punto de vista de su interpretación y su implementación, habiéndose originado una importante discusión, aún muy abierta, acerca de su idoneidad frente a otras medidas.)

[14] Bajo condiciones apropiadas, fijada una variable o función de pérdida, y fijado un nivel de probabilidad residual, el VaR correspondiente se puede aproximar arbitrariamente por el valor de alguna medida coherente para esa variable. Esa misma medida no dará, en general, una buena aproximación para otras variables o funciones de pérdida, lo que clarifica el sentido del principio de coherencia como estrategia.

[15] En Föllmer y Schied (2011) se definen las *medidas de déficit robustas* como aquellas que pueden representarse en la forma

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} E_Q[\ell(X)],$$

para alguna función, $\ell$, convexa creciente y alguna clase, $\mathcal{Q}$, de medidas de probabilidad.

Ambas medidas son casos especiales de la formulación general de *medidas espectrales* propuesta por Acerbi (2002) (paralelamente, Kusuoka 2001), con la motivación de la representación flexible de la *aversión al riesgo* bajo el principio de coherencia. Dada una *función peso* (o *espectro*), $\phi$, en el intervalo $[0,1]$, i.e. $\phi \in L^1([0,1])$, $\phi \geq 0$ c.t.p. y $\int_0^1 \phi(p)dp = 1$, se define

$$\mathrm{M}_\phi(X) := \int_0^1 \mathrm{VaR}_p(X)\phi(p)dp.$$

Se prueba que las funciones peso monótonamente no decrecientes c.t.p. (espectro *admisible*) caracterizan la clase de medidas coherentes invariantes en ley y aditivamente comonotónicas (e.g. $\mathrm{ES}_{1-\alpha}(\cdot)$). La condición de admisibilidad del espectro se interpreta directamente en el sentido de asignar mayor peso a mayores pérdidas en la valoración del riesgo bajo el principio de coherencia.

Un estudio interesante sobre medidas de riesgo basadas en cuantiles generalizados (como caso de medidas de déficit, e incluyendo en particular los *expectiles*) puede verse en Bellini et al. (2014).

Las medidas de riesgo espectrales tienen relación con el enfoque introducido por Wang (1996, 2000) (véanse también Balbás et al. 2009, Guégan y Hassani 2015, Kreinovich et al. 2009, etc.) basado en *operadores de distorsión*. Se trata de reemplazar la esperanza de una variable o función de pérdida no negativa, $X$, con función de distribución *decumulativa* (FDD) (tb., *recíproca*) $S_X(x) := 1 - F_X(x)$,

$$E[X] = \int_0^\infty S_X(x)dx,$$

por la $g-$*esperanza generalizada*, definida como

$$H_g[X] = \int_0^\infty g(S_X(x))dx,$$

para alguna *función de distorsión*, $g : [0,1] \to [0,1]$ creciente tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$, satisfaciendo condiciones de regularidad apropiadas de modo que $g(S_X(\cdot))$ sea una FDD. Este planteamiento se extiende convenientemente al caso de variables o funciones de pérdida cualesquiera, definiéndose una *medida de riesgo de distorsión* con funcción de distorsión $g$, $\rho_g$, por la expresión

$$\rho_g(X) = -\int_{-\infty}^0 \left[1 - g(S_X(x))\right] dx + \int_0^{+\infty} g(S_X(x))dx.$$

Condiciones apropiadas sobre la función de distorsión, cuyo efecto consiste en reasignar pesos con respecto a la medida original, proporcionan medidas que cumplen diferentes principios. Formalmente, la elección de una función de distorsión cóncava se relaciona directamente con la elección de un espectro admisible bajo el enfoque de medidas de riesgo espectrales, y, por tanto, con el cumplimiento del principio de coherencia. Ejemplos de interés práctico son la propia *medida de Wang* o la *transformada potencial dual*. Desde el punto de vista de la representación de la *aversión al riesgo*, generalmente se consideran formas paramétricas de la función de distorsión para una elección adecuada del grado de aversión. En otros escenarios, la función de distorsión puede representar la incoporación de información objetiva sobre características del sistema (aspectos estructurales, efecto de covariables, etc.).

Especial relevancia han tenido en la teoría las formulaciones de familias de medidas de riesgo basadas en enfoques que incorporan elementos de la Teoría de la Información; en particular, medidas de riesgo basadas en divergencias generalizadas (véanse, por ejemplo, Föllmer y Knispel 2011, Föllmer y Schied 2002, 2011, etc.). Su motivación original se sitúa, de hecho, en relación con problemas de optimización en la Teoría de la Utilidad. Las denominadas *medidas de riesgo entrópicas* se definen bajo la prescripción de una función de penalización

$$\alpha(Q) = \frac{1}{\beta} H(Q|P),$$

para $\beta > 0$, siendo $H(Q|P)$ la entropía relativa o divergencia de Kullback-Leibler de $Q$ respecto de $P$. Esta especificación conduce a la forma explícita de la correspondiente medida de riesgo, dada por

$$\rho_\beta(X) = \frac{1}{\beta} \log E\left[e^{\beta X}\right].$$

La familia de medidas de riesgo entrópicas proporciona una de las posibles escalas de «interpolación» paramétrica entre las medidas de riesgo esperanza matemática (para $\beta \downarrow 0$) y *worst-case* (para $\beta \uparrow \infty$).

La formulación anterior se generaliza convenientemente mediante distintas versiones generalizadas de la divergencia. Así, en el caso de una función de penalización definida por

$$\alpha_g(Q) = I_g(Q|P),$$

para alguna función convexa, $g$, siendo $I_g(Q|P) = E\left[g\left(\frac{dQ}{dP}\right)\right]$ la correspondiente $g-$*divergencia* (se omiten otros aspectos formales específicos en esta definición; véanse, por ejemplo, Ali y Silvey 1966, Csiszár 1967, Vajda 2009, etc.), la correspondiente *medida de riesgo de* $g-$*divergencia* tiene la forma

$$\rho_g(X) = \sup_{Q \ll P} \left(E_Q[X] - I_g(Q|P)\right).$$

Especial atención han recibido representaciones de la función $g$ en términos de parámetros de *deformación*, destacando, entre otras, la asociada a la divergencia de Tsallis (véanse, por ejemplo, Juniper 2006, Trivellato 2013, Zhou et al. 2013, sobre distintas aplicaciones en el ámbito financiero; véanse también Tsallis 2009, en el contexto general de la mecánica estadística, Naudts 2011, en termoestadística, etc.).

Otras formulaciones pueden obtenerse en términos de versiones alternativas de divergencias generalizadas. Se establece, bajo este enfoque, una penalización basada explícitamente en la «distancia» (en términos de divergencia) de la medida $Q$ con respecto a la medida $P$. Ahmadi-Javid (2012a, 2012b) propone una formulación de *medidas de riesgo* $g-$ *entrópicas* coherentes, basada en la representación dual en términos de una subclase, $\mathcal{P}$, acotada en $g-$divergencia con respecto a la medida $P$ original (en particular, se obtiene también una escala de interpolación entre las medidas esperanza matemática y *worst-case*, ajustada según la cota de Chernoff).

En esta breve discusión me he referido solo a algunos aspectos básicos de la TMR. En la literatura, muy extensa y avanzada, se identifican diversas líneas de investigación relevantes y de intenso desarrollo, entre las que cabe destacar: formulación de nuevas familias de medidas de riesgo, atendiendo a diferentes axiomas o principios axiomáticos, con especial énfasis en formulaciones basadas en medidas de entropía e información generalizadas; medidas de riesgo de argumento multidimensional, condicionales, dinámicas, vector-valuadas, conjunto-valuadas, etc.; medidas de riesgo sistémicas; aspectos relativos a la implementación de medidas de riesgo (criterios de elección, métodos de estimación y validación, adquisición de información, etc.), etc. Algunas de dichas líneas se relacionan con la idea, colectivamente admitida, del carácter multidimensional y dinámico del riesgo, así como con la problemática asociada a la agregación y la transferencia del riesgo, entre otros aspectos. Rockafellar y Uryasev (2013) ofrecen una visión integral («*risk quadrangle paradigm*») interesante acerca de los principales elementos conceptuales y formales de la TMR, con referencia al marco general de la evaluación y gestión de riesgos. Desde el punto de vista filosófico y epistemológico, se mantiene abierta la discusión acerca de la idoneidad de distintos principios como «forma de pensar», universalmente o dependiendo de su ámbito de aplicación.

## 2.3. Riesgo relativo a excedencias de umbrales en espacio-tiempo

Uno de los enfoques más significativos en el estudio de comportamientos extremos en campos aleatorios fue introducido de forma sistematizada por Adler (1981, 2000), en relación con el análisis probabilístico de características geométricas (e.g. curvaturas de Lipschitz-Killing, volúmenes intrínsecos, funcionales de Minkowski) de conjuntos de excursión definidos por excedencias de las realizaciones –o «funciones muestrales»– sobre un umbral dado (véanse también, entre otros, Adler y Taylor 2007, 2011, Adler et al. 2013, Azäis y Wschebor 2009, VanMarcke 2010, etc.). Bajo esta perspectiva, se estudia la aproximación asintótica de probabilidades de excedencia con respecto al crecimiento del umbral (es decir, en el caso límite de *sucesos raros*).

Desde el punto de vista estadístico, en muchas aplicaciones interesa analizar, con fines de caracterización y predictivos, comportamientos de excedencia sobre umbrales definidos por niveles críticos que vienen prefijados por razones ligadas al fenómeno y a los objetivos del estudio (no tratándose estrictamente de *sucesos raros* en el límite, sino de sucesos que pueden ocurrir en una escala «regular» de frecuencia). Se trata de analizar de forma directa, desde esta perspectiva y con fines de valoración del riesgo, las distribuciones de probabilidad, generalmente desconocidas analíticamente, de indicadores relativos a distintas características estructurales de los conjuntos de excursión (e.g. Christakos y Hristopulos 1997, Craigmile et al. 2006, French y Sain 2013, Yang y Christakos 2015, Zhang et al. 2008, etc.).

Formalmente, dado un campo aleatorio espacial, $X = \{X(s) : s \in S \subseteq \mathbb{R}^d\}$, y dados un umbral, $u \in \mathbb{R}$, y un subdominio, $D \subseteq S$, se define el conjunto de excursión (o de excedencia) de $X$ sobre $u$ en $D$ como

$$A_u(X, D) = \{s \in D : X(s) \geq u\}.$$

De nuevo, por simplicidad, supondremos que todas las variables, $X(s)$, $s \in S$, tienen distribución de probabilidad continua. Supondremos también que $D$ es compacto, así como, implícitamente, que el campo $X$ tiene propiedades de regularidad apropiadas. Consideremos dos indicadores de interés en la práctica, desde el punto de vista de la evaluación de riesgos:

- *Área de excedencia*, absoluta y relativa:

$$\lambda(A_u(X, D)), \quad \lambda^D(A_u(X, D)) := \frac{\lambda(A_u(X, D))}{\lambda(D)}$$

- *Volumen de exceso*, absoluto y relativo:

$$V(A_u(X, D)) := \int_D \max\{X(s) - u, 0\} ds, \quad V^D(A_u(X, D)) := \frac{V(A_u(X, D))}{\lambda(D)}.$$

($\lambda$ representa la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{R}^d$). Denotemos por $F_{X(s)}$ a la FDA de $X(s)$, y por $S_{X(s)} := 1 - F_{X(s)}$ a la correspondiente FDD. Definiendo la FDA compuesta del campo $X$ sobre $D$ como

$$F_X^D(x) := \int_D F_{X(s)}(x) \lambda^D(ds), \quad x \in \mathbb{R},$$

y denotando por $S_X^D$ a la correspondiente FDD (también, por $X^D$, a la variable aleatoria compuesta asociada, con FDA $F_X^D$), los valores esperados del área relativa de excedencia y del volumen relativo de exceso del campo $X$ sobre el umbral $u$ en el subdominio $D$ pueden escribirse en la forma

$$E\left[\lambda^D(A_u(X, D))\right] = S_X^D(u), \quad E\left[V^D(A_u(X, D))\right] = \int_u^{+\infty} S_X^D(u') du'.$$

(Propiedades estadísticas de la FDA compuesta, $F_X^D$, y aplicaciones a la estimación de regiones de excedencia han sido estudiadas, por ejemplo, en Craigmile et al. 2006, French y Sain 2013, Lahiri et al. 1999, Wright et al. 2003, Zhang et al. 2008, etc.).

Considerando el umbral $u = \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X^D)$, es decir, el recíproco inferior de $\alpha$ para la FDD $S_X^D$ (en particular, $F_X^D(u) = 1-\alpha$), se tiene la relación

$$\frac{E\left[V^D(A_{\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X^D)}(X,D))\right]}{E\left[\lambda^D(A_{\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X^D)}(X,D))\right]} = \mathrm{ES}_{1-\alpha}(X^D) - \mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X^D), \tag{3}$$

donde $E\left[\lambda^D(A_{\mathrm{VaR}_{1-\alpha}(X^D)}(X,D))\right] = \alpha$. Esta expresión es interesante por diversas razones; en particular, supuesto que el valor de ES sea finito, es conocido (véase, por ejemplo, McNeil et al. 2005, p.283) que el incremento relativo entre las medidas ES y VaR (es decir, su cociente menos la unidad) tiene un comportamiento asintótico (i.e. cuando $\alpha \to 0$) constante, determinado por el parámetro de forma, $\xi$, de la *distribución de Pareto generalizada* (DPG): para $\xi < 1$,

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\mathrm{ES}_{1-\alpha}}{\mathrm{VaR}_{1-\alpha}} = \max\{1, (1-\xi)^{-1}\}$$

(nótese que $\xi < 0$ corresponde a una distribución acotada superiormente). En nuestro caso, si la FDA compuesta tiene una cola superior pesada, la diferencia relativa entre las correspondientes medidas ES y VaR podrá ser arbitrariamente alta según $\xi$ se aproxime a 1. La relación (3) se extiende de forma conveniente cuando se consideran transformaciones de deformación espacial sobre el dominio, cambios de medida locales representativos del efecto de covariables (e.g. densidad de población en evaluación de riesgos de exposición), transformaciones de escala sobre los estados, etc.

Este ejemplo, inmediato e intuitivo, tiene una finalidad meramente ilustrativa acerca del interés del estudio y aplicación de medidas de riesgo en el contexto espacial y espacio-temporal, en particular sobre indicadores relativos a características estructurales de conjuntos de excursión. En la práctica, más allá de sus valores esperados, intesesará considerar distintas medidas de riesgo (e.g. VaR, ES, etc.) sobre estos y otros indicadores. Mediante simulación condicionada basada en la modelización del proceso subyacente, y el análisis local restringido a subdominios espaciales definidos por ventanas móviles o basado en núcleos de convolución, este enfoque permite generar mapas dinámicos de riesgo con diferentes niveles de resolución, para distintos indicadores y medidas de riesgo. Sus propiedades y su interpretación vendrán determinadas por las características estructurales del proceso subyacente, las correspondientes distribuciones de los indicadores considerados y las medidas de riesgo elegidas, así como posibles generalizaciones sobre la especificación del umbral (e.g. umbrales funcionales, estocásticos, etc.), elementos que motivan la necesidad de desarrollar la investigación en este contexto, tanto sobre aspectos analíticos como metodológicos. Por otra parte, los indicadores relativos a características estructurales de conjuntos de excursión son solo un caso especial, de interés usual en la práctica, de funcionales de realizaciones de campos aleatorios. Se trata, bajo una perspectiva más amplia, de establecer una fundamentación teórica a partir de la consideración de funcionales generales (determinísticos o estocásticos) sobre campos aleatorios (ordinarios y generalizados).

## 2.4. Riesgo, complejidad y transferencia

«The Century of Complexity?», titula Érdi (2008) la primera sección de su texto *Complexity Explained*, en referencia a una muy conocida sentencia de Stephen W. Hawking: «I think the next century will be *the century of complexity*» (publicada en *Complexity Digest* 2001/10, 5 de marzo de 2001). Aunque declaraciones de este alcance quedan finalmente validadas y establecidas desde una visión retrospectiva, es un hecho que, de forma extraordinariamente creciente, el uso del término «complejidad» y el desarrollo de la investigación acerca de este concepto, amplio y difícil de definir por sus múltiples dimensiones y connotaciones, se han instalado de forma muy extendida en todos los ámbitos del conocimiento desde la segunda mitad del siglo XX. Una ingente cantidad de publicaciones se orientan a tratar de dar respuesta a los retos conceptuales, epistemológicos y formales que plantea la emergente «Ciencia de la Complejidad», o también «Ciencia de los Sistemas Complejos» (véanse, por ejemplo, Érdi 2008, Fromm 2004, Gell-Mann 1988, 1995, Samet 2009, Sornette 2006, Standish 2008, 2014, Waldrop 1992, Yoshida 2010, etc.).

El interés científico en el estudio de la complejidad e incertidumbre inherentes a la dinámica de sistemas reales de toda índole ha derivado, en particular, en un desarrollo especialmente intensificado en las últimas dos décadas de la investigación avanzada en el ámbito de la modelización estocástica de procesos en el tiempo, espacio y espacio-tiempo, para una representación adecuada de diferentes características estructurales, así como el análisis estadístico en relación con objetivos de inferencia a partir de la observación y, eventualmente, objetivos relativos a la evaluación de riesgos para la toma de decisiones. En conjunto, se trata de acercar el nivel de sofisticación de los modelos a los fenómenos reales, mediante la incorporación de elementos que de forma flexible permitan dar una representación más aproximada de su complejidad.

Desde una perspectiva matemático-probabilístico-estadística, son muchas las disciplinas directamente implicadas en este ámbito de la investigación, entre las que cabe destacar: teoría de campos aleatorios (ordinarios y generalizados), cálculo estocástico, teoría de procesos puntuales, inferencia estadística, análisis y modelización de datos funcionales, análisis de valores extremos, geometría estocástica, teoría de conjuntos aleatorios, teoría de la información, análisis multiescalar y multifractal, simulación estocástica, enfoques basados en integración de conocimiento, etc.

Algunos desarrollos recientes se han dirigido especialmente al análisis y modelización de características estructurales relacionadas con comportamientos *anómalos*, en su sentido más amplio. Entre otros aspectos, bajo esta denominación se contemplan: campos aleatorios generalizados, distribuciones de colas pesadas, dependencias de largo rango, intermitencia, dominios irregulares y aleatorios, fractalidad/multifractalidad, comportamiento caótico, etc. (e.g. Adler et al. 1998, Doukhan et al. 2003, Harte 2001, Kobeissi 2013, Malevergne y Sornette 2006, Resnick 2007, Samorodnitsky y Taqqu 1994, Sornette 2006, etc.).

Son múltiples los avances y las líneas de investigación abiertas en este ámbito, y solo me referiré al mismo de forma contextual. No obstante, resumo en los siguientes puntos algunos aspectos en los que, en el marco de proyectos financiados de ámbito nacional e internacionales, hemos realizado diversas contribuciones (cito alguna referencias representativas), principalmente relacionadas con extensiones y generalizaciones sobre modelos y métodos de análisis en el espacio y espacio-tiempo:

- Campos aleatorios ordinarios y generalizados de órdenes fraccionarios, sobre dominios ordinarios y fractales/multifractales; análisis multiescalar [e.g. Angulo y Ruiz-Medina (2011), Angulo et al. (2000, 2004, 2008), Goitía et al. (2005), Ruiz-Medina y Angulo (2006), Ruiz-Medina et al. (2001, 2003, 2004a, 2004b, 2016)]

- Medidas de entropía, información y complejidad; análisis multifractal; criterios de dependencia y diseño de redes de observación [e.g. Alonso et al. (2016), Angulo y Bueso (2001), Angulo y Esquivel (2014, 2015), Angulo et al. (2005, 2013a), Bueso et al. (1998, 1999a), Mardia et al. (2006), Puente et al. (1996)]

- Análisis de características estructurales relativas a excedencias de umbrales; efecto de transformaciones; indicadores, medidas y mapas dinámicos de riesgo [e.g. Alonso et al. (2011), Angulo y Madrid (2010, 2013, 2014), Angulo et al. (2011), Madrid et al. (2012)]

- Modelización e inferencia; síntesis de conocimiento [e.g. Angulo et al. (2012, 2013b), Bueso et al. (1999b), Camacho-Collados et al. (2015), Christakos et al. (2011), Gutiérrez et al. (1991, 2005), Kolovos et al. (2013), Leiva et al. (2009), Vera et al. (2016), Yu et al. (2014)]

Una de las motivaciones que quiero destacar en este discurso, y por ello he elegido este título, es el desfase constatable en la intertransferencia de resultados avanzados, por una parte, en modelización y análisis estadístico de sistemas complejos (más allá de los ámbitos finaciero y actuarial) y, por otra, en el desarrollo de herramientas sofisticadas de análisis y evaluación de riesgos. En particular, en el contexto del análisis en el espacio-tiempo, la relativa escasez de referencias bibliográficas cruzadas entre ambos campos de estudio, con respecto a lo que sería esperable de una interacción más próxima y directa, aunque con excepciones recientes que indican una cierta intensificación del proceso de convergencia, significa un importante reto, y sobre todo la identificación de un espacio abierto de oportunidades para la investigación. Existen importantes conexiones aún por explotar entre enfoques de la geometría de campos aleatorios, geometría estocástica, teoría de conjuntos aleatorios, cálculo estocástico, procesos puntuales, teoría de valores extremos (en particular, desde el punto de vista de excedencias de umbrales), escalamiento multifractal, etc. De nuevo, destacaría cómo en este amplio marco del desarrollo científico uno de los ejes comunes viene dado por la Teoría de la Información, en sentido amplio (conceptos y resultados sobre medidas de entropía, información, divergencia, información mutua, complejidad), que juega un papel clave en distintos campos. En particular, como he mencionado en el apartado anterior, un ejemplo interesante viene dado por la consideración extendida de generalizaciones basadas en transformaciones definidas por parámetros de deformación, con distintos propósitos pero bajo una misma idea subyacente.

**ES frente a VaR**

En el terreno de la transferencia directa a las aplicaciones, uno de los aspectos de mayor controversia actual concierne a la discusión acerca del problema de selección y validación de medidas de riesgo desde el punto de vista de su implementación práctica. Ilustraré esta cuestión con referencia a un caso de notable trascendencia.

Sir Dennis Weatherstone, que fue Oficial Ejecutivo Jefe y Presidente de JP Morgan & Co., promovió la puesta en práctica en 1987 de la medida que se denominaría *Value at Risk* (valoración del riesgo en el informe diario usualmente referido como «4.15pm Report»), posteriormente introducida por otras instituciones bancarias desde 1990. Como medida regulatoria sobre requerimientos de capital bancario frente a riesgos de mercado, el Banco de Pagos Internacionales (*Bank for International Settlements*) adoptó la recomendación de uso de la medida VaR en un documento de enmienda[16] a *Basel I* (1988-) elaborado en 1996 por el Co-

[16]Basel Committee on Banking Supervision, *Overview of the amendment to the capital accord to*

mité de Supervisión Bancaria de Basilea (*Basel Committee on Banking Supervision*) (BCBS), puesta en práctica en 1998. Con motivo de la crisis financiera iniciada en 2007-2008, con la confluencia de las hipotecas *subprime*, la burbuja inmobiliaria y el escenario de desestabilización e incertidumbre originado durante la guerra de Irak, entre otros factores, según diferentes estudios, y bajo la constatación de que el sistema bancario no había estado preparado para afrontar en términos de previsiones de liquidez una situación de tal adversidad extrema (que ya había sido pronosticada por algunos, como Raghuram Rajan, economista jefe del FMI en el periodo 2003-2007), el BCBS incluyó en *Basel III* (2011-) una recomendación acerca de sustituir la medida VaR por la medida ES en la valoración del riesgo; concretamente, en un documento de consulta[17] de octubre de 2013 se propone adoptar como referencia el valor $\mathrm{ES}_{97{,}5\,\%}$ frente al actual $\mathrm{VaR}_{99{,}0\,\%}$, con una modificación del periodo de validación acorde a las mayores exigencias en la estimación del ES:

> (p.3) [...] In considering the overall approach to risk measurement for minimum capital requirements, the Committee has confirmed its intention to pursue two key reforms outlined in the first consultative paper:
>
> - *Stressed calibration*: The Committee recognises the importance of ensuring that regulatory capital will be sufficient in periods of significant market stress. As the crisis showed, it is precisely during stress periods that capital is most critical to absorb losses. Furthermore, a reduction in the cyclicality of market risk capital charges remains a key objective of the Committee. Consistent with the direction taken in Basel 2.5, the Committee will address both issues by moving to a capital framework that is calibrated to a period of significant financial market stress in both the internal models-based and standardised approaches. The Committee is aware that similar care is needed in selecting appropriate periods

*incorporate market risks*, January 1996, http://www.bis.org/publ/bcbs24.pdf.

[17] Basel Committee on Banking Supervision, *Consultative Document – Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework*, October 2013, https://www.bis.org/publ/bcbs265.pdf; véase también *Consultative Document – Fundamental review of the trading book*, May 2012, http://www.bis.org/publ/bcbs219.pdf.

of stress, recognising that in general not all asset classes or exposures are subject to market stress at the same time.

- *Move from Value-at-Risk (VaR) to Expected Shortfall (ES)*: A number of weaknesses have been identified with using VaR for determining regulatory capital requirements, including its inability to capture "tail risk". For this reason, the Committee proposed in May 2012 to replace VaR with ES. ES measures the riskiness of a position by considering both the size and the likelihood of losses above a certain confidence level. The Committee has agreed to use a 97.5 % ES for the internal models-based approach and has also used that approach to calibrate capital requirements under the revised market risk standardised approach.

Overall, the Committee believes these changes represent a rationalisation of the framework with the internal models-based approach moving to a single, stressed metric.

[...]

(p.18) [...] (i) *Moving to expected shortfall*

As outlined in the first CP [Consultative Paper], the current framework's reliance on VaR as a quantitative risk metric raises a number of issues, most notably the inability of the measure to capture the "tail risk" of the loss distribution. The Committee has therefore decided to use an expected shortfall (ES) measure for the internal models-based approach and will determine the risk weights for the revised standardised approach using an ES methodology. ES accounts for the tail risk in a more comprehensive manner, considering both the size and likelihood of losses above a certain threshold.

Based on the more complete capture of tail risks using an ES model, the Committee believes that moving to a confidence level of 97.5 % (relative to the 99th percentile confidence level for the current VaR measure) is appropriate. This confidence level will provide a broadly similar level of risk capture as the existing 99th percentile VaR threshold, while providing a number of benefits, including generally more stable model output and often less sensitivity to extreme outlier observations.

[...]

[Basel Committee of Banking Supervision, *Consultative Document – Fundamental review of the trading book: A revised market risk framework* («Issued for comment by 31 January 2014», Bank for International Settlements, October 2013).]

(Como observación puntual, es llamativo que la parte final de la última frase citada de este documento es aparentemente incorrecta, o pudiera inducir a una interpretación inapropiada en la forma en que está expresada, atendiendo a la menor robustez de la media respecto a la mediana –en este caso, ambas residuales– y de las posibles fluctuaciones en el grosor de la cola superior de la distribución con respecto a una supuesta distribución normal de referencia. La principal ventaja de la medida ES con respecto a la medida VaR es, de hecho, su mayor fidelidad para reflejar posibles comportamientos anómalos, con objetivos de valoración del riesgo[18].)

En el documento mencionado se desarrollan en detalle todos los aspectos concernientes a la implementación. La aplicación regulatoria de ES en lugar de VaR como referencia de riesgos de mercado en el sistema bancario internacional, prevista para 2018, con un periodo de calibración y validación previo durante 2016-17, se encuentra aún bajo intenso debate. Entre otros argumentos en discusión, se ha señalado su falta de *elicitabilidad*, dificultades de *backtesting* y, precisamente, falta de *robustez* (e.g. Cont et al. 2010, Gneiting 2011). Acerbi y Székely (2014) proponen varios métodos para resolver el problema de *backtesting* y sugieren la irrelevancia en este contexto de la condición de elicitabilidad (importante, no obstante, desde el punto de vista de comparación y selección entre distintos métodos). Se han sugerido algunas medidas alternativas, como los *expectiles* (Bellini et al. 2014, Martin 2014a, Ziegel 2014, etc.), que sí cumplen la elicitabilidad y también el principio de coherencia, no la robustez, si bien actualmente no son contem-

[18]Se suele citar la frase «It is better to be roughly right than precisely wrong», con frecuencia atribuida tras su muerte a John Maynard Keynes (1883-1946) como una sentencia verbal que solía pronunciar. La frase «It is better to be vaguely right than exactely wrong» ya aparece en el libro (p.272) *Logic: Deductive and Inductive* de Carveth Read (1848-1931), publicado en 1898, Grant Richards, London.

pladas en general como competitivas. Una discusión interesante a este respecto se aporta en Emmer et al. (2015), donde los autores, valorando ventajas e inconvenientes, finalmente concluyen a favor del uso de la medida ES frente a VaR o expectiles.

Esta breve referencia se sitúa de nuevo en el ámbito financiero, principal motor actual de la investigación sobre medidas de riesgo. Sin embargo, quiero enfatizar una vez más la idea de que, actualmente, la problemática en el desarrollo y la aplicación de medidas de riesgo en el contexto general de la complejidad de sistemas es mucho más abierta desde el punto de vista teórico y metodológico, y también desde el punto de vista de la transferencia multidisciplinar; por ejemplo, en el desarrollo de estrategias y protocolos de actuación en Medio Ambiente, Epidemiología, etc.

# Conclusión

*Riesgo* y *complejidad* son términos que conceptualmente comparten cierto carácter de transversalidad, en un sentido amplio, en el conjunto de las disciplinas científicas. La «Ciencia del Riesgo» y la «Ciencia de la Complejidad» se sitúan en la frontera del desarrollo del conocimiento. Junto a los logros en su rápido avance se identifican espacios muy abiertos para la interacción.

La Teoría [Moderna] de Medidas de Riesgo constituye el núcleo fundamental en el amplio marco de la evaluación y gestión de riesgos. Su desarrollo relativamente reciente, como disciplina de índole matemático-probabilística basada en principios axiomáticos, está muy ligado al esfuerzo de integración unificada de paradigmas comunes reconocibles en distintos campos de aplicación. La complejidad de sistemas, en cuanto a su estructura, dinámica e incertidumbre inherente, plantea, desde el punto de vista analítico y epistemológico, importantes retos (y oportunidades para la investigación) en el proceso de construcción de la Teoría de Medidas de Riesgo y su implementación.

En conjunto, los avances y debates críticos en este campo reflejan el interés científico, con una fuerte motivación en objetivos de aplicación, hacia el desarrollo de una teoría fundamental y general sobre medidas de riesgo en el contexto de la complejidad.

Algunos días antes de terminar el borrador de este discurso, y con la intención de extraer algún contenido que pudiese relacionar con el objeto del mismo desde la perspectiva del desarrollo general de la Ciencia, abrí de nuevo una antigua copia, editada en 1934, del libro *Essays in Science*, de Albert Einstein[19], que encontré hace casi veinticinco años en una librería durante una estancia en Davis. Dentro del ensayo titulado «What is the Theory of Relativity?» (escrito por petición the *The Times*), A. Einstein dice (p. 54):

> [...] When we say that we have succeeded in understanding a group of natural processes, we invariably mean that a constructive theory has been found which covers the processes in question.
>
> Along with this most important class of theories there exists a second, which I will call "principle-theories". These employ the analytic, not the synthetic method. The elements which form their basis and starting-point are not hypothetically constructed but empirically discovered ones, general characteristics of natural processes, principles that give rise to mathematically formulated criteria which the separate processes or the theoretical representation of them have to satisfy.
>
> [...]
>
> The advantages of the constructive theory are completeness, adaptability and clearness, those of the principle theory are logical perfection and security of the foundations [...].

Creo que esta descripción define de forma muy próxima la transformación hacia la Teoría Moderna de Medidas de Riesgo.

---

[19] *Essays in Science*, Albert Einstein, «Copyright, 1934, by COVICI FRIEDE INC., originally published as 'MEIN WELTBILD', copyright, 1933, by QUERIDO VERLAG, Amsterdam, translated from the German by ALAN HARRIS. Published in the United States of America by the Philosophical Library, Inc., New York»

# Agradecimientos

En primer lugar, agradezco muy sinceramente al Profesor Andrés González Carmona haber aceptado el encargo de la Academia de actuar como padrino en mi recepción como nuevo miembro. Le agradezco personalmente, como compañero y amigo, haber recibido de su parte en todo momento un reconocimiento y estímulo al desarrollo de mi trabajo; siempre he encontrado en él una disposición positiva y cercana, aconsejándome de forma sensible en muchas situaciones a lo largo de mi carrera. Él es un referente de dedicación al desarrollo de nuestro departamento, muy especialmente en la promoción de los estudios en Estadística en todos los niveles académicos. También le agradezco sus apreciaciones y sugerencias en la preparación de este discurso.

Quiero expresar mi agradecimiento a aquellos con quienes de manera más directa he podido compartir la experiencia de estos años, desde mi ingreso en la Universidad de Granada como investigador en formación.

Al Profesor Ramón Gutiérrez Jaímez, mi director de tesis, le debo haberme ofrecido la posibilidad de incorporarme a la carrera profesional universitaria, punto que ha sido determinante en mi trayectoria en los siguientes treinta y seis años y origen de que en este momento me encuentre en esta tribuna. Siempre le agradeceré, además de haberme introducido en el estudio de los procesos estocásticos, la raíz de todo mi trabajo posterior, su apoyo, y su paciencia, en aquellos años en que los recursos para la investigación distaban mucho, en una escala incomparable, de los actuales, lo que sin duda era también un importante estímulo a la creatividad, al trabajo autónomo, a la imaginación. En él siempre he podido apreciar el valor de alguien que ha entregado su tiempo y su empeño en lograr que el Departamento de Estadística e Investigación Operativa sea uno de los de mayor entidad en nuestra universidad y referente externo de producción científica. Personalmente, pienso que nunca le habré correspondido en la medida de lo que he recibido de su parte como discípulo.

Me gustaría nombrar uno a uno a todos mis compañeros de departamento, haciendo un recorrido desde los primeros años en que algunos compartíamos largas discusiones en los seminarios de investigación sobre integración estocástica organizados por nuestro director. Espero que todos sepan comprender que el no hacerlo no es en ningún modo la omisión del agradecimiento que tengo a cada uno por diversos motivos a lo largo de todos estos años.

Quiero hacer explícito mi agradecimiento a quienes fueron en su momento mis doctorandos, especialmente a Fracisco Javier Alonso Morales y María del Carmen Bueso Sánchez, con quienes he compartido de forma continuada, desde hace más de dos décadas, largas discusiones y muchas horas de trabajo en líneas de investigación productivas; más adelante, Arnaldo Goitía, Rosaura Fernández Pascual, María del Pilar Frías Bustamante, en co-dirección con otros compañeros; en la etapa más reciente, Ana Esther Madrid García y Francisco Javier Esquivel Sánchez, quienes me han dado la oportunidad de abrir nuevos temas de investigación que están en conexión con contenidos de este discurso; también a quienes dirijo sus tesis en este momento, lo que de nuevo supone para mí un gran estímulo a la ampliación de perspectivas, así como a compañeros de nuestro departamento y de otros centros, nacionales y extranjeros, con quienes he llevado a cabo muy diversas colaboraciones. Mucho de lo que he aprendido en la investigación lo debo al largo trabajo compartido con todos ellos, en ámbitos muy variados.

Muy especialmente, agradezco a María Dolores Ruiz Medina, Lola, compañera en la vida personal y familiar, y también en el trabajo, haber podido compartir con ella un largo recorrido de proyectos y experiencias profesionales fructíferas y enriquecedoras, afrontando juntos muchos avatares. Admiro su constancia y tesón, su excepcional capacidad de trabajo y su altitud de miras al afrontar los retos de la investigación. Le agradezco su apoyo durante todos estos años. También, en esta ocasión, su ayuda al darme su punto de vista sobre varios aspectos de esta exposición.

A nuestras hijas, María Esther y Alba, les debo, entre todos los agradecimientos infinitos imaginables, el poder compartir cada día su entusiasmo por aprender y descubrir, y también les tengo que agradecer su paciencia y comprensión, siempre positivas, con nuestras obligaciones y nuestros tiempos.

A mis padres, qué puedo decir, les debo todo, la oportunidad de la vida y el haber recibido los valores éticos esenciales para guiarme en ella, que comparto con todos mis hermanos. Su estímulo y su ayuda permanente, desde mis primeros pasos, son la principal razón de que hoy me encuentre aquí. Todos ellos son siempre para mí referente y soporte, en todo momento y en cualquier circunstancia.

Para terminar, Sr. Presidente, vuelvo a la idea con la que inicié este discurso. Creo que cada paso en nuestra carrera académica conlleva, en efecto, una nueva responsabilidad, en la conciencia de formar parte de un colectivo con una empresa común. Con ese mismo principio ético asumo el compromiso de corresponder a la confianza que me confiere la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales con este nombramiento.

Muchas gracias.

# Referencias


[1] Acerbi, C. (2002). Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *Journal of Banking & Finance* **26**, 1505-1518.

[2] Acerbi, C., Székely, B. (2014). Back-testing expected shortfall. *Risk Magazine*, December 2014.

[3] Adler, R.J. (1981). *The Geometry of Random Fields*. Wiley, London.

[4] Adler, R.J. (2000). On excursion sets, tube formulae, and maxima of random fields. *Annals of Applied Probability* **10**, 1-74.

[5] Adler, R.J., Feldman, R.E, Taqqu, M.S. (eds.) (1998). *A Users Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques for Analysing Heavy Tailed Distributions and Processes*. Birkhaüser, Boston.

[6] Adler, R.J., Samorodnitsky, G., Taylor, J.E. (2013). High level excursion set geometry for non-Gaussian infinitely divisible random fields. *The Annals of Probability* **41**, 134-169.

[7] Adler, R.J., Taylor, J.E. (2007). *Random Fields and Geometry*. Springer, New York.

[8] Adler, R.J., Taylor, J.E. (2011). *Topological Complexity of Smooth Random Functions*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XXXIX-2009. Springer, Heidelberg.

[9] Ahmadi-Javid, A. (2012a). Entropic Value-at-Risk: A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications* **155**, 1105-1123.

[10] Ahmadi-Javid, A. (2012b). Addendum to: Entropic Value-at-Risk: A new coherent risk measure. *Journal of Optimization Theory and Applications* **155**, 1124-1128.

[11] Ali, S.M., Silvey, S.D. (1966). A general class of coefficients of divergence of one distribution from another. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B* **28**, 131-142.

[12] Alonso, F.J., Bueso, M.C., Angulo, J.M. (2011). Effect of data transformations on predictive risk indicators. *Methodology and Computing in Applied Probability* **14**, 705-716.

[13] Alonso, F.J., Bueso, M.C., Angulo, J.M. (2016). Dependence assessment based on generalized relative complexity: Application to sampling network design. *Methodology and Computing in Applied Probability*, doi:10.1007/s11009-016-9495-6.

[14] Angulo, J.M., Bueso, M.C. (2001). Random perturbation methods applied to multivariate spatial sampling design. *Environmetrics* **12**, 416-431.

[15] Angulo, J.M., Bueso, M.C., Alonso, F.J. (2013a). Space-time adaptive sampling and data transformations. En: *Spatio-Temporal Design: Advances in Efficient Data Acquisition*, J. Mateu, W. Müller (eds.), 231-248. Wiley, Chichester.

[16] Angulo, J.M., Esquivel, F.J. (2014). Structural complexity in space-time seismic event data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **28**, 1187-1206.

[17] Angulo, J.M., Esquivel, F.J. (2015). Multifractal dimensional dependence assessment based on Tsallis mutual entropy. *Entropy* **17**, 5382-5401.

[18] Angulo, J.M., Kelbert, M., Leonenko, N.N., Ruiz-Medina, M.D. (2008). Spatiotemporal random fields associated with stochastic fractional Helmholtz and heat equations. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **22** (Supl. 1), 3-13.

[19] Angulo, J.M., Madrid, A.E. (2010). Structural analysis of spatio-temporal threshold exceedances. *Environmetrics* **21**, 415-438.

[20] Angulo, J.M., Madrid, A.E. (2013). Spatial and space-time threshold exceedances. Entrada en: *Encyclopedia of Environmetrics – 2nd Edition*, Vol. 5, A.H. El-Shaarawi, W.W. Piegorsch (eds.), 2547-2552. Wiley, Chichester.

[21] Angulo, J.M., Madrid, A.E. (2014). A deformation/blurring-based spatio-temporal model. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **28**, 1061-1073.

[22] Angulo, J.M., Madrid, A.E., Ruiz-Medina, M.D. (2011). Entropy based correlated shrinkage of spatial random processes. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **25**, 389-402.

[23] Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D. (2011). Multifractional random systems on fractal domains. En: *Modern Mathematical Tools and Techniques in Capturing Complexity*, Part VIII "Probability Theory", L. Pardo, N. Balakrishnan, M.A. Gil (eds.), 357-378. Springer, Berlin Heidelberg.

[24] Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D., Alonso, F.J., Bueso, M.C. (2005). Generalized approaches to spatial sampling design. *Environmetrics* **16**, 523-534.

[25] Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V. (2000). Estimation and filtering of fractional generalised random fields. *Journal of the Australian Mathematical Society, Series A – Pure Mathematics and Statistics* **69**, 336-361.

[26] Angulo, J.M., Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V. (2004). Wavelet orthogonal approximation of fractional generalized random fields on bounded domains. *Theory of Probability and Mathematical Statistics* **71**, 28-43.

[27] Angulo, J.M., Yu, H.-L., Langousis, A., Kolovos, A., Wang, J-F., Madrid, A.E., Christakos, G. (2013b). Spatiotemporal infectious disease modeling: A BME-SIR approach. *PLOS ONE* **8**, e72168.

[28] Angulo, J.M., Yu, H.-L., Langousis, A., Madrid, A.E., Christakos, G. (2012). Modeling of space-time infectious disease spread under conditions of uncertainty. *International Journal of Geographical Information Science* **26**, 1751-1772.

[29] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1997). Thinking coherently. *Risk* **10**, 33-49.

[30] Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance* **9**, 203–228.

[31] Aven, T. (2012). The risk concept – historical and recent development trends. *Reliability Engineering and System Safety* **99**, 33-44.

[32] Aven, T., Ortwin, R. (2010). *Risk Management and Governance: Concepts, Guidelines and Applications*. Springer, Heidelberg New York.

[33] Azäis, J.-M., Wschebor, M. (2009). *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields*. Wiley, Hoboken.

[34] Balbás, A. (2007). Mathematical methods in modern risk measurement: A survey. *Revista de la Real Academia de Ciencias, Serie A* **101**, 205-219.

[35] Balbás, A., Garrido, J., Mayoral, S. (2009). Properties of distorsion risk measures. *Methodology and Computing in Applied Probability* **11**, 385-399.

[36] Bayes, T., Price, R. (1763). An essay towards solving a problem in the Doctrine of Chances. By the late Rev. Mr. Bayes, F.R.S. communicated by Mr. Price, in a letter to John Canton, A.M.F.R.S. *Philosophical Transactions* **53**, 370-418.

[37] Bedford, T., Cooke, R. (2001). *Probabilistic Risk Analysis. Foundations and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge.

[38] Beirlant, J., Goegebeur, Y., Segers, J., Teugels, J. (2004). *Statistics of Extremes*. Wiley, Chichester.

[39] Bellini, F., Bernhard, K., Müller, A., Gianin, E.R. (2014). Generalized quantiles as risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics* **54**, 41-48.

[40] Berger, J.O. (1980). *Statistical Decision Theory: Methods and Concepts*. Springer, New York.

[41] Bernoulli, D. (1738). Specimen theoriae novae de mensura sortis. *Comentarii Academiae Scientarium Imperialis Petropolitanae* **Tomus V**, 175-192.

[42] Bernoulli, D. (1954). Exposition of a new theory on the measurement of risk. *Econometrica* **22**, 23-36.

[43] Bernoulli, J. (1713). *Ars Conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, Fratrum, Basilea.

[44] Bueso, M.C., Angulo, J.M., Alonso, F.J. (1998). A state-space-model approach to optimal spatial sampling design based on entropy. *Environmental and Ecological Statistics* **5**, 29-44.

[45] Bueso, M.C., Angulo, J.M., Qian, G., Alonso, F.J. (1999a). Spatial sampling design based on stochastic complexity. *Journal of Multivariate Analysis* **71**, 94-110.

[46] Bueso, M.C., Qian, G., Angulo, J.M. (1999b). Stochastic complexity and model selection from incomplete data. *Journal of Statistical Planning and Inference* **76**, 273-284.

[47] Bühlmann, H. (1970). *Mathematical Methods in Risk Theory*. Springer, Heidelberg.

[48] Camacho-Collados, M., Liberatore, F., Angulo, J.M. (2015). Districting problem for the efficient and effective design of patrol sector. *European Journal of Operational Research* **246**, 674-684.

[49] Castillo, E., Hadi, A.S., Balakrishnan, N., Sarabia, J.M. (2005). *Extreme Values and Related Models with Applications in Engineering and Science*. Wiley, Hoboken.

[50] Christakos, G., Angulo, J.M., Yu, H.-L. (2011). Constructing space-time PDFs in Geosciences. *Boletín Geológico y Minero* **122**, 531-542.

[51] Christakos, G., Hristopulos, D.T. (1997). Stochastic indicator analysis of contaminated sites. *Journal of Applied Probability* **34**, 988-1008.

[52] Coles, S. (2001). *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, London.

[53] Cont, R., Deguest, R., Scandolo, G. (2010). Robustness and sensitivity analysis of risk measurement procedures. *Quantitative Finance* **10**, 593–606.

[54] Craigmile, P.F., Cressie, N., Santner, T.J., Rao, Y. (2006). A loss function approach to identifying environmental exceedances. *Extremes* **8**, 143-159.

[55] Csiszár, I. (1967). Information-type measures of differences of probability distribution and indirect observations. *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **2**, 299-318.

[56] Dale, A.I. (1999, 2ª ed.). *A History of Inverse Probability. From Thomas Bayes to Karl Pearson*. Springer, New York.

[57] Daykin, C.D., Pentikäinen, T., Pesonen, M. (1994). *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall, London.

[58] Deelstra, G., Dhaene, J., Vanmaele, M. (2011). An overview of comonotonicity and its applications in Finance and Insurance. En: *Advanced Mathematical Methods for Finance*, G. Di Nunno, B. Øksendal (eds.), 155-179. Springer, Berlin Heidelberg.

[59] DeGroot, M.H. (1970). *Optimal Statistical Decisions*. Wiley, Hoboken. (2004 Wiley Classics Library Edition.)

[60] Delbaen, F. (2002). Coherent risk measures on general probability spaces. En: *Advances in Finance and Stochastic, Essays in Honor of Dieter Sondermann* K. Sandmann, P.J. Schonbucher (eds.), 1–38. Springer, Berlin.

[61] Dembo, A., Zeitouni, O. (2009, 2ª ed.). *Large Deviations, Techniques and Applications*. Springer, Berlin Heidelberg.

[62] Doukhan, P., Oppenheim, G., Taqqu, M. (eds.) (2003). *Theory and Applications of Long-Range Dependence*. Birkhäuser, Boston.

[63] Einstein, A. (1934). *Essays in Science*. Philosophical Library, New York. (Traducción del original 'Mein Weltbild', 1933, Querido, Amsterdam.)

[64] El-Shaarawi, A.H., Piegorsch, W.W. (eds.) (2012). *Encyclopedia of Environmetrics - Second Edition*. Wiley, Chichester.

[65] Ellis, R.S. (2006). *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics*. Springer, Berlin Heidelberg.

[66] Embrechts, P., Klüppelberg, C., Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer, Berlin.

[67] Emerson, W. (1776). *Miscellanies. Or a Miscellaneous Treatise; Containing Several Mathematical Subjects*. J. Nourse, London.

[68] Emmer, S., Kratz, M., Tasche, D. (2015). What is the best risk measure in practice? A comparison of standard measures. *Journal of Risk* **18**, 31-60.

[69] Érdi, P. (2008). *Complexity Explained*. Springer, Berlin Heidelberg.

[70] Föllmer, H., Knispel, T. (2011). Entropic risk measures: Coherence vs. convexity, model ambiguity, and robust large deviations. *Stochastics and Dynamics* **11**, 333-351.

[71] Föllmer, H., Schied, A. (2002). Convex measures of risk and trading constraints. *Finance and Stochastics* **6**, 429-447.

[72] Föllmer, H., Schied, A. (2011). *Stochastic Finance: An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, Berlin.

[73] French, J.P., Sain, S.R. (2013). Spatio-temporal exceedance locations and confidence regions. *The Annals of Applied Statistics* **7**, 1421-1449.

[74] Frittelli, M., Gianin, E.R. (2002). Putting order in risk measures. *Journal of Banking & Finance* **26**, 1473-1486.

[75] Frittelli, M., Gianin, E.R. (2005). Law invariant convex risk measures. *Advances in Mathematical Economics* **7**, 33-46.

[76] Fromm, J. (2004). *The Emergence of Complexity*. Kassel University Press GmbH, Kassel.

[77] Galambos, J. (1978). *The Asymptpotic Theory of Extreme Order Statistics*. Wiley, New York.

[78] Gell-Mann, M. (1988). Simplicity and complexity in the description of Nature. *Engineering & Science* **51**, 2-9.

[79] Gell-Mann, M. (1995). What is complexity? *Complexity* **1**, 16-19.

[80] Gneiting, T. (2011). Making and evaluating point forecasts. *Journal of the American Statistical Association* **106**, 746–762.

[81] Goitía, A., Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. (2005). Joint estimation of spatial deformation and blurring in environmental data. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **9**, 1-7.

[82] Goovaerts, M.J., Kaas, R., Dhaene, J., Tang, Q. (2004). Some new classes of consistent risk measures. *Insurance: Mathematics and Economics* **34**, 505-516.

[83] Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*. Springer, New York.

[84] Guégan, D., Hassani, B. (2015). Distortion risk measure or the transformation of unimodal distributions into multimodal functions. En: *Future Perspectives in Risk Models and Finance*, International Series in Operations Research & Management Science **211**, A. Bensoussan, D. Guégan, C.S. Tapiero (eds.), 71-88. Springer International Publishing Switzerland.

[85] Gumbel, E.J. (1958). *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, New York.

[86] Gutiérrez, R., Angulo, J.M., González, A., Pérez, R. (1991). Inference in lognormal multidimensional diffusion processes with exogenous factors: Application to modelling in Economics. *Applied Stochastic Models and Data Analysis* **7**, 295-316.

[87] Gutiérrez, R., Roldán, C., Gutiérrez-Sánchez, R., Angulo, J.M. (2005). Estimation and prediction of a 2D lognormal diffusion random field. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **19**, 258-265.

[88] Haimes, Y.Y. (2009, 3ª ed.). *Risk Modeling, Assessment, and Management*. Wiley, Hoboken.

[89] Harte, D. (2001). *Multifractals: Theory and Applications*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

[90] Huber, P.J. (1981). *Robust Statistics*. Wiley, New York.

[91] Huber, P.J., Ronchetti, E.M. (2009). *Robust Statistics - Second Edition*. Wiley, Hoboken.

[92] Jouini, E., Meddeb, M., Nizar, T. (2004). Vector-valued coherent risk measures. *Finance and Stochastics* **8**, 531-552.

[93] Jouini, E., Schachermayer, W., Touzi, N. (2006). Law invariant risk measures have the Fatou property. *Advances in Mathematical Economics* **9**, 49-71.

[94] Juniper, J. (2006). The Tsallis distribution and generalised entropy: Prospects for future research into decision-making under uncertainty. *Working Paper No. 06-19* (28 pp.). Centre of Full Employment and Equity, The University of Newcastle.

[95] Kantz, H., Altmann, E.G., Hallerberg, S., Holstein, D., Riegert, A. (2006). Dynamic interpretation of extreme events: Predictability and predictions. En: *Extreme Events in Nature and Society*, S. Albeverio, V. Jentsch, H. Kantz (eds.), 69-93. Center for Frontier Sciences. Springer, Berlin Heidelberg.

[96] Kendall, M.G., Buckland, W.R. (1957). *A Dictionary of Statistical Terms*. The International Statistical Institute. Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh.

[97] Klüppelberg, C., Straub, D., Welpe, I.M. (eds.) (2014). *Risk - A Multidisciplinary Introduction*. Springer, Berlin.

[98] Kobeissi, Y.H. (2013). *Multifractal Financial Markets. An Alternative Approach to Asset and Risk Management*. SpringerBriefs in Finance. Springer, New York.

[99] Kolovos, A., Angulo, J.M., Modis, K., Papantonopoulos, G., Wang, J.-F., Christakos, G. (2013). Model-driven development of covariances for spatiotemporal environmental health assessment. *Environmental Monitoring and Assessment* **185**, 815-831.

[100] Kotz, S., Nadarajah, S. (2000). *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*. Imperial College Press, London.

[101] Kou, S.G., Peng, X., Heyde, C.C. (2013). External risk measures and Basel accords. *Mathematics of Operations Research* **38**, 393-417.

[102] Kreinovich, V., Nguyen, H.T., Sriboonchitta, S. (2009). A new justification of Wang transform operator in financial risk analysis. *International Journal of Intelligent Systems and Applied Statistics* **2**, 45-57.

[103] Kriele, M., Wolf, J. (2014). *Value-Oriented Risk Management of Insurance Companies*. Springer, London.

[104] Krokhmal, P., Zabarankin, M., Uryasev, S. (2011). Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science* **16**, 49-66.

[105] Kumamoto, H., Henley, E.J. (2000, 2ª ed.). *Probabilistic Risk Assessment and Management for Engineers and Scientists*. Wiley-IEEE Press, Hoboken.

[106] Kusuoka, S. (2001). On law-invariant coherent risk measures. En: *Advances in Mathematical Economics* Vol. 3, S. Kusuoka, T. Maruyama (eds.), 83–95. Springer, Tokyo.

[107] Laeven, R.J.A., Stadje, M.A. (2013). Entropy coherent and entropy convex risk measures. *Mathematics of Operations Research* **38**, 265-293.

[108] Lahiri, S.N., Kaiser, M.S., Cressie, N., Hsu, N.-J. (1999). Prediction of spatial cumulative distribution functions using subsampling (with discussion). *Journal of the American Statistical Association* **94**, 86-110.

[109] Laplace, M. Le Comte (1812). *Théorie Analytique des Probabilités*. Mme. Vve. [de Louis] Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.

[110] Laplace, M. Le Comte (1814). *Essai Philosophique sur les Probabilités*. Mme. Vve. [de Louis] Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, Paris.

[111] Leadbetter, M.R., Lindgren, G., Rootzén, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer, New York.

[112] Leiva, V., Sanhueza, A., Angulo, J.M. (2009). A length-biased version of the Birnbaum-Saunders distribution with application in water quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* **23**, 299-307.

[113] Liese, F., Miescke, K.-J. (2008). S*tatistical Decision Theory: Estimation, Testing and Selection*. Springer, New York.

[114] Luhmann, N. (1993). *Risk: A Sociological Theory*. De Gruyter, New York.

[115] Madrid, A.E., Angulo, J.M., Mateu, J. (2012). Spatial threshold exceedance analysis through marked point processes. *Environmetrics* **23**, 108-118.

[116] Malevergne, Y., Sornette, D. (2006). *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*. Springer, Berlin.

[117] Mardia, K.V., Angulo, Angulo, J.M., Goitía, A. (2006). Synthesis of image deformation strategies. *Image and Vision Computing* **23**, 108-118.

[118] Martin, R.J. (2014a). Expectiles behave as expected. *Risk* **27**, 79-83.

[119] Martin, R.M. (2014b). The St. Petersburg Paradox. En: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2014 Edition), E.N. Zalta (ed.). The Metaphysics Research Lab., Stanford University.

[120] McNeil, A.J., Frey, R., Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management. Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, Princeton Oxford.

[121] Melnick, E.L., Everitt, B.S. (eds.) (2008). *Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment*. Wiley, New York.

[122] Naudts, J. (2011). *Generalized Thermostatistics*. Springer, New York.

[123] Pradier, P.-C. (2004). Histoire du risque. En: *Historia de la Probabilidad y la Estadística (II)*, AHEPE, J. Santos del Cerro, M. García Secades (eds.), 171-186. Delta, Publicaciones Universitarias, Las Rozas.

[124] Pratt, J.W., Raiffa, H., Schlaifer, R. (1995). *Introduction to Statistical Decision Theory*. MIT Press, Cambridge.

[125] Puente, C.E., López, N.M., Pinzón, J.E., Angulo, J.M. (1996). The Gaussian distribution revisited. *Advances in Applied Probability* **28**, 500-524.

[126] Read, C. (1898). *Logic: Deductive and Inductive*. Grant Richards, London.

[127] Reiss, R.-D., Thomas, M. (2007, 3ª ed.). *Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields*. Birkhäuser, Basel.

[128] Resnick, S. (1987). *Extreme Values, Point Processes and Regular Variation*. Springer, New York.

[129] Resnick, S. (2007). *Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Modelling*. Springer, New York.

[130] Rockafellar, R.T., Uryasev, S. (2013). The fundamental risk quadrangle in risk management, optimization and statistical estimation. *Surveys in Operations Research and Management Science* **18**, 33-53.

[131] Rockafellar, R.T., Uryasev, S., Zabarankin, M. (2006). Generalized deviations in risk analysis. *Finance and Stochastics* **10**, 51-74.

[132] Rocquigny, E. de (2012). *Modelling Under Risk and Uncertainty: An Introduction to Statistical, Phenomenological and Computational Methods*. Wiley, Chichester.

[133] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley, Chichester.

[134] Ross, S.M. (1999). *An Introduction to Mathematical Finance. Options and Other Topics*. Cambridge Universitry Press, Cambridge.

[135] Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M. (2006). Multifractional probabilistic laws. En: *Advances in Distribution Theory, Order Statistics and Inference*, Statistics for Industry and Technology Series, N. Balakrishnan, E. Castillo, J.M. Sarabia (eds.), Cap. 9, 143-153. Birkhäuser, Boston.

[136] Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M., Anh, V.V. (2003). Fractional-order regularization and wavelet approximation to the inverse estimation problem for random fields. *Journal of Multivariate Analysis* **85**, 192-216.

[137] Ruiz-Medina, M.D., Angulo, J.M., Christakos, G., Fernández-Pascual, R. (2016). New compactly supported spatiotemporal covariance functions from SPDEs. *Statistical Methods & Applications* **25**, 125-141.

[138] Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V., Angulo, J.M. (2001). Stochastic fractional-order differential models with fractal boundary conditions. *Statistics & Probability Letters* **54**, 47-60.

[139] Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V., Angulo, J.M. (2004a). Fractal random fields on domains with fractal boundary. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **7**, 395-417.

[140] Ruiz-Medina, M.D., Anh, V.V., Angulo, J.M. (2004b). Fractional generalized random fields of variable order. *Stochastic Analysis and Applications* **22**, 775-800.

[141] Samet, R.H. (2009). *Long-Range Futures Research: An Application of Complexity Science*. Book Surge Publishing, North Charleston.

[142] Samorodnitsky, G., Taqqu, M.S. (1994). *Stable Non-Gaussian Processes*. Chapman & Hall, New York.

[143] Sornette, D. (2006, 2ª ed.). *Critical Phenomena in Natural Sciences*. Springer, Berlin.

[144] Standish, R.K. (2008). Concept and definition of complexity. En: *Intelligent Complex Adaptive Systems*, A. Yang, Y. Shan (eds.), Cap. IV, 105–124. IGI Global, Hershey.

[145] Standish, R.K. (2014). Complexity: Quantity or quality. *International Journal of Signs and Semiotic Systems* **3**, 27-45.

[146] Steele, J.M. (2001). *Stochastic Calculus and Financial Applications*. Springer, New York.

[147] Trivellato, B. (2013). Deformed exponentials and applications to Finance. *Entropy* **15**, 3471-3489.

[148] Tsallis, C. (2009). *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World*. Springer, New York.

[149] Vajda, I. (2009). On metric divergences of probability measures. *Kybernetica* **45**, 885-900.

[150] VanMarcke, E. (2010). *Random Fields: Analysis and Synthesis*. World Scientific, Singapore.

[151] Varadhan, S.R.S. (1984). *Large Deviations and Applications*. SIAM, Philadelphia.

[152] Varadhan, S.R.S. (2008). Large deviations. *The Annals of Probability* **36**, 397-419.

[153] Vera, J.F., Angulo, J.M., Roldán, J.A. (2016). Stability analysis in nonstationary spatial covariance estimation. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, doi:10.1007/s00477-016-1228-4.

[154] Wald, A. (1950). *Statistical Decision Functions*. Wiley, New York.

[155] Waldrop, M.M. (1992). *Complexity: The Emerging Science at the Edge of Order and Chaos*. Simon & Schuster Paperbacks, New York.

[156] Wang, S. (1996). Premium calculation by transforming the layer premium density. *ASTIN Bulletin* **26**, 71-92.

[157] Wang, S.S. (2000). A class of distortion operators for pricing financial and insurance risks. *The Journal of Risk and Insurance* **67**, 15-36.

[158] Wang, S., Dhaene, J. (1998). Comonotonicity, correlation order and premium principles. *Insurance: Mathematics and Economics* **22**, 235-242.

[159] Wang, S.S., Young, V.R., Panjer, H.H. (1997). Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics* **21**, 173–183.

[160] Wright, D.L., Stern, H.S., Cressie, N. (2003). Loss functions for estimation of extrema with an application to disease mapping. *The Canadian Journal of Statistics* **31**, 251-266.

[161] Yaari, M.E. (1987). The dual theory of choice under risk. *Econometrica* **55**, 95-115.

[162] Yang, Y., Christakos, G. (2015). Spatiotemporal characterization of ambient $PM_{2,5}$ concentrations in Shandong province (China). *Environmental Science & Technology* **49**, 13431-13438.

[163] Yoshida, Z. (2010). *Nonlinear Science. The Challenge of Complex Systems*. Springer, Berlin Heidelberg.

[164] Yu, H.-L., Angulo, J.M., Cheng, M.-H., Wu, J., Christakos, G. (2014). An online spatiotemporal prediction model for dengue fever epidemic in Kaohsiung (Taiwan). *Biometrical Journal* **56**, 428-440.

[165] Zachmann, K. (2014). Risk in historical perspective: Concepts, contexts, and conjunctions. En: *Risk - A Multidisciplinary Introduction*, C. Klüppelberg, D. Straub, I.M. Welpe (eds.), 3-35. Springer, Berlin.

[166] Zhang, J., Craigmile, P.F., Cressie, N. (2008). Loss function approaches to predict a spatial quantile and its exceedance region. *Technometrics* **50**, 216-227.

[167] Zhou, R., Cai, R., Tong, G. (2013). Applications of entropy in Finance: A review. *Entropy* **15**, 4909-4931.

[168] Ziegel, J.F. (2014). Coherence and elicitability. *Mathematical Finance*, doi:10.1111/mafi.12080.

## LAUDATIO DEL

## EXCMO. SR. D. ANDRÉS GONZÁLEZ CARMONA

**Excelentísimo Sr. Presidente de la Academia**

**Excmos. e Ilmos. Académicos y Académicas y Autoridades**

**Señoras y Señores**

### 1. Agradecimiento

En primer lugar, deseo expresar mi satisfacción y profundo agradecimiento a la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada por designarme para apadrinar a D. José Miguel Angulo Ibáñez en este solemne acto de ingreso en la misma, como nuevo Académico Numerario. Este agradecimiento es especialmente significativo hacia nuestro común maestro, el académico D. Ramón Gutiérrez Jáimez, ya que, teniendo mayores merecimientos que yo, tuvo la deferencia de permitirme ocupar el lugar que, sin duda, a él mismo le correspondía. Esta satisfacción se acrecienta porque me corresponde realizar el elogio no solo de un gran docente y científico, sino también de un gran amigo y compañero.

## 2. Currículo

El profesor Angulo Ibáñez nació en Granada, donde realizó sus estudios de enseñanza primaria y bachiller, pasando a su término a estudiar la Licenciatura en Matemáticas en la Universidad de Granada. Ya en el último año su vocación investigadora le llevó a formar parte de un equipo de investigación dirigido por los profesores y académicos Alfonso Guiraúm Martín y Ramón Gutiérrez Jáimez que, financiado por una entidad bancaria, realizó un estudio exhaustivo sobre la distribución ganadera en la Alpujarra.

Finalizada la licenciatura se incorporó como becario de investigación a la Universidad de Granada, para la realización de su tesis doctoral, que defendió brillantemente en junio de 1985, sobre *Aportaciones a la Teoría de Sistemas de Ecuaciones Integrales Estocásticas de McShane: Existencia y Unicidad, Regularidades*, dirigida por el académico D. Ramón Gutiérrez Jáimez.

A continuación se incorporó como profesor en el departamento de Estadística e Investigación Operativa de esta universidad, donde llegó a alcanzar el grado de Catedrático de Universidad en diciembre de 2000.

Durante su carrera como docente, ha impartido muy diversas materias, entre las cuales se incluyen: Análisis de Series Temporales, Análisis de Valores Extremos, Econometría, Estadística Matemática, Matemáticas Financieras, Métodos de Programación Matemática, Métodos Estadísticos para la Evaluación de Riesgos, Procesos Estocásticos, Técnicas de Simulación Estocástica, Teoría de la Probabilidad, etc., así como diferentes cursos especializados en posgrado.

Su actividad investigadora se ha desarrollado en campos tan avanzados como diversos, incluyendo, entre otros: el estudio de la integración estocástica y procesos de difusión; la modelización y análisis estadístico de procesos temporales, espaciales y espacio-temporales; el diseño de redes de observación mediante criterios basados en medidas de información; los campos aleatorios ordinarios y generalizados (modelos de órdenes fraccionarios, análisis multiescalar, estimación y filtrado, fractalidad y multifractalidad), y el análisis de excedencias de umbrales. En la actualidad su interés se centra en los modelos estocásticos espacio-temporales, las medidas de información y complejidad y el análisis de riesgos, tema este último sobre el que ha versado su excelente discurso de ingreso.

En estos temas, ha dirigido un equipo de investigación que ha desarrollado una intensa labor científica plasmada en una alta producción consolidada en el ámbito internacional. Cuenta con más de 100 publicaciones, incluyendo 70 artículos y varias discusiones en revistas indexadas en *Journal Citation Reports – Science Edition* (JCR-SE) de muy diversas categorías: Advances in Applied Probability, Biometrical Journal, Entropy, Environmental & Ecological Statistics, Environmental Modelling & Software, Environmetrics, European Journal of Operational Research, Image and Vision Computing, Methodology and Computing in Applied Probability, Spatial Statistics, PLOS ONE, Statistical Methods & Applications, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, Stochastic Processes and their Applications, Test, etc., la mayoría con impacto alto/medio.

Es autor de más de 150 contribuciones en congresos de reconocido prestigio de ámbito nacional e internacional, incluyendo más de 30 ponencias invitadas.

Ha sido Editor Asociado de 5 revistas internacionales y revisor de artículos en más de 20 revistas nacionales e internacionales.

Ha organizado un gran número de actividades dirigidas a la investigación: seminarios, cursos especializados con investigadores destacados, intercambios de investigadores, etc., y ha realizado diversas estancias por invitación en centros extranjeros, especialmente en University of California, Davis (USA) (en año sabático), Queensland University of Technology, Brisbane (Australia), University of Leeds (UK), San Diego State University (USA) y Zhejiang University, Hangzhou (China).

Ha participado en 22 proyectos de investigación financiados, tanto internacionales como del Plan Nacional de Investigación y de la Junta de Andalucía, siendo Investigador Principal en diez de ellos.

Ha dirigido siete tesis doctorales y diversos trabajos de investigación en programas de doctorado y trabajos de fin de máster. Ha sido director de varias becas de formación de personal investigador.

Ha sido promotor y coordinador del actual Programa de Doctorado en Estadística Matemática y Aplicada de la Universidad de Granada.

Ha formado parte de la comisión de puesta en marcha del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada (IEMath-GR).

Ha sido Presidente de la SEIO, la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, que aglutina a profesionales, investigadores y docentes, así como instituciones, de ese ámbito de conocimiento en España. Entre otras acciones realizadas durante este último cargo, ha sido miembro vocal del Comité Ejecutivo del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) y ha sido miembro del Consejo promotor y fundador de la Federación de Sociedades Nacionales Estadísticas Europeas (FENStatS).

## 3. Comentarios al discurso

Por lo que respecta al trabajo que ha presentado con motivo de su ingreso en la Academia, bajo el título *La Teoría Moderna de Medidas de Riesgo, en el Contexto de la Complejidad*, quiero transmitir en primer lugar mi felicitación al Profesor Angulo por su excelente disertación.

Debo destacar en el mismo la conjunción de aspectos conceptuales, de aspectos matemáticos formales y de aspectos metodológicos, computacionales y aplicados, en un ámbito de muy especial relevancia y trascendencia en el actual desarrollo del conocimiento y su transferencia. Son muchas las personas que cuando se refieren a las Matemáticas piensan en una actividad altamente abstracta. Y siendo cierto, no lo es menos que las realmente fructíferas están inspiradas siempre en problemas del mundo real y concreto que, tras ser resueltos, sufren un proceso de abstracción que permite aplicar los resultados obtenidos a tipos de problemas y situaciones cuyo alcance nunca se había previsto en la solución original.

A lo largo del discurso el Profesor Angulo ha ido exponiendo este tipo de construcción científica de forma tan correcta y clara que a todos nos ha parecido asequible, pese a la gran dificultad que el tema entraña.

El análisis desarrollado en esta elaborada perspectiva sintética y crítica sobre la temática abordada, desde su amplio conocimiento y larga experiencia como investigador, nos permite asegurar la calidad científica del nuevo académico y garantizar el éxito de sus futuros trabajos.

## 4. Cierre

Sé que la brillante intervención del Profesor Angulo es el preludio de la labor que va a realizar en nuestra Academia y que contribuirá al mejor desarrollo de la misma, por lo que la bienvenida que le ofrezco en nombre de la Academia es el anuncio de que su presencia en la misma redundará sin duda en el beneficio de la institución.

Muchas gracias.